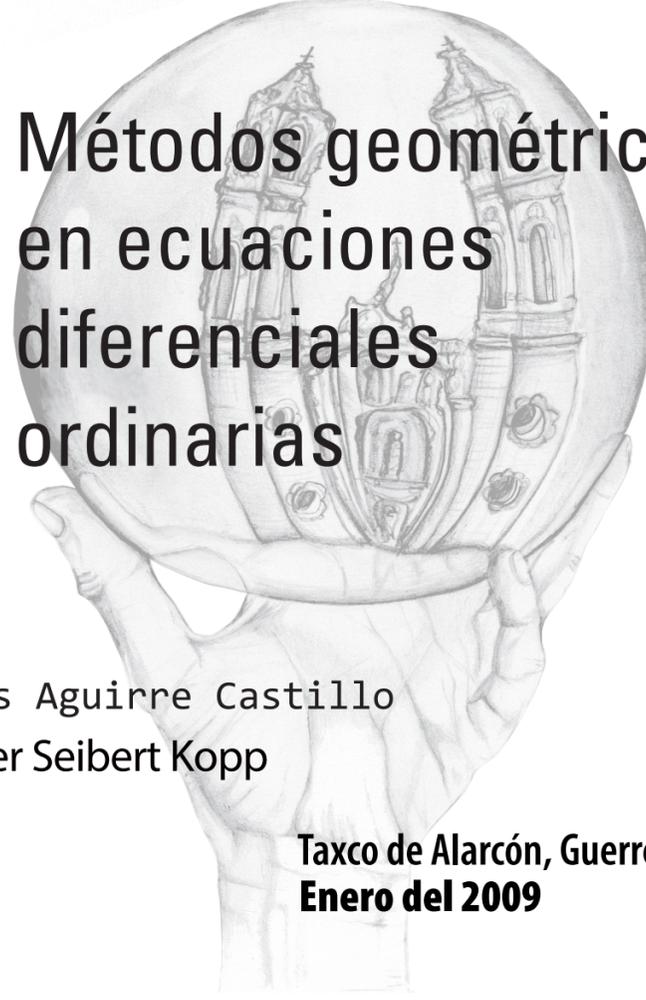


Universidad Autónoma Metropolitana - *Iztapalapa*

Coloquio
del Departamento de Matemáticas



División de
Ciencias
Básicas e
Ingeniería



Métodos geométricos en ecuaciones diferenciales ordinarias

Luis Aguirre Castillo
Peter Seibert Kopp

Taxco de Alarcón, Guerrero
Enero del 2009

**2^{do} Coloquio del Departamento
de Matemáticas**

**Métodos Geométricos en Ecuaciones
Diferenciales Ordinarias**

Luis Aguirre Castillo
Peter Seibert Kopp



Comité Organizador

Mario Pineda Ruelas

Roberto Quezada Batalla

Blanca Rosa Pérez Salvador

Luis Aguirre Castillo

Daniel Espinosa

Constancio Hernández García

Michael Rivera Arce (Apoyo logístico)

Métodos Geométricos en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Luis Aguirre Castillo

Peter Seibert Kopp

Departamento de Matemáticas, UAM-I



Universidad Autónoma Metropolitana

Contenido

Introducción.	vii
Introducción	vii
Capítulo 1. La Variedad Central	3
1.1. La variedad central (<i>Centre manifold</i>)	3
1.2. Demostraciones de los teoremas	11
Capítulo 2. Sistemas dinámicos.	17
2.1. Introducción.	17
2.2. El Concepto de sistema dinámico	17
2.3. Los conceptos básicos relacionados con sistemas dinámicos.	18
2.4. Cerraduras de órbitas y semiórbitas. Conjuntos límites.	21
2.5. Movimientos periódicos.	26
2.6. Flujos diferenciables y ecuaciones diferenciales.	29
Capítulo 3. Teoría de Estabilidad	41
3.1. Estabilidad, prolongación y función de Lyapunov	41
3.2. Conjuntos límites, conjuntos límites prolongacionales y puntos errantes. El teorema de LaSalle (principio de invariancia)	60
Capítulo 4. Teoría Topológica de Wazewski.	77
4.1. Sistemas autónomos.	77
4.2. Aplicación a sistemas en el plano.	85
4.3. Aplicación a sistemas a sistemas no autónomos.	89
4.4. Teorema alternativo al de Wazewski	91
4.5. Método para establecer la existencia de una separatriz.	92
Bibliografía	95

Introducción.

El objetivo de este curso es dar una introducción a la aplicación de los *métodos geométricos* en el estudio ecuaciones diferenciales ordinarias mostrando su fortaleza. Iniciamos en el Capítulo 1 con el *Teorema de la variedad central*. En el Capítulo 2 nos ubicamos en el contexto de los *sistemas dinámicos*.

El estudio de los sistemas dinámicos tiene su origen en la teoría de las ecuaciones diferenciales con los trabajos de H. Poincaré en el siglo XIX. Poincaré, y después I. Bendixson, estudiaron las propiedades topológicas de las soluciones de las ecuaciones diferenciales autónomas en el plano. Una de las principales motivaciones que propiciaron el surgimiento de los sistemas dinámicos se debió a que los precursores de este enfoque (G. D. Birkhoff [Bi], entre otros) puramente topológico (o métrico) se dieron cuenta de que muchas de las propiedades de las soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales dependen esencialmente de las propiedades topológicas de las soluciones, y no necesariamente de la diferenciabilidad (ver por ejemplo, [BZ], [Si] y [Wh]). Mencionamos brevemente los *sistemas semidinámicos*, que a diferencia de los *sistemas dinámicos*, son objetos que no toman en cuenta el pasado, parten del estado inicial del sistema y su evolución hacia el futuro, es decir, se presupone la existencia y unicidad de las soluciones para todo el tiempo $t \geq 0$, mientras que para los sistemas dinámicos, se presupone la existencia y unicidad para todo $t \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, la ecuación diferencial $\dot{x} = -x^3$ define un sistema semidinámico, pero no un sistema dinámico porque las soluciones no están definidas para todo tiempo negativo: *se escapan* en un tiempo negativo finito. Los sistemas semidinámicos están estrechamente relacionados con los sistemas dinámicos clásicos (para esto ver [BO] y [Sa]); sus resultados se aplican a una clase más amplia de ecuaciones diferenciales que los obtenidos para los sistemas dinámicos. Los sistemas semidinámicos, tienen su origen en la interpretación *dinámica* de las ecuaciones diferenciales funcionales con retardo y en las ecuaciones diferenciales parciales de evolución, en contraste con los sistemas dinámicos que tienen su origen en las ecuaciones diferenciales

ordinarias autónomas, estas a menudo (en el caso de las no lineales) tampoco definen sistemas dinámicos (ver [BO]). En el Capítulo 3 damos una introducción al estudio de la *estabilidad en sistemas dinámicos* aplicando el segundo método de Lyapunov [Ly] y algunos *principios de invariancia*. Finalmente en el Capítulo 4 introducimos el *método topológico de Ważewski* para probar la existencia de separatrices.

La Variedad Central

1.1. La variedad central (*Centre manifold*)

La idea. Se definen primero *variedad estable*, *variedad inestable*¹:

Se consideran sillas de dimensiones mayores: división de autovalores (raíces características) en los de parte real positiva y negativa; los autovalores correspondientes a una y otra clase tienen los subespacios (lineales) *inestable* y *estable* respectivamente.

EJEMPLO 1.1.1. Consideremos el sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$; tenemos los eigenvectores correspondientes:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Subespacio estable: $\{y = z = 0\}$ (eje x), subespacio inestable: $\{x = 0\}$ (plano yz).

Si una o más raíces de la parte real es cero, las soluciones que corresponden a estas (poniendo los coeficientes de los términos con factores exponenciales [correspondientes a raíces con partes reales ≥ 0]=cero), se llama *espacio central* (Ver Figura 1.1).

EJEMPLO 1.1.2. Consideremos el sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_{1,2} = \pm i$, $\lambda_3 = -1$; soluciones sin términos exponenciales:

$$x(t) = x_0 \cos t, \quad y(t) = y_0 \sin t, \quad z(t) \equiv 0.$$

¹Términos mal elegidos en la literatura: la variedad estable es *inestable* y la variedad inestable es *estable*.

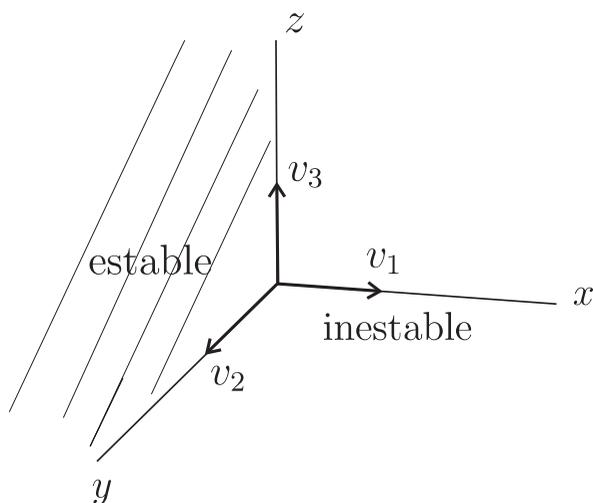


Figura 1.1

El plano xy ($z = 0$) es un conjunto (variedad) invariante [si $z(0) = z_0 \neq 0$, aparece un término exponencial $z(t) = z_0 x e^{-t}$]; el subespacio central es $\{z = 0\}$; el espacio complementario $\{x = y = 0\}$, es el espacio estable; el espacio inestable es \emptyset . Los tres subespacios, E_c, E_e, E_i (central, estable, inestable) descomponen el espacio de estados del sistema

$$\mathbb{R}^3 = E_c \times E_e \times E_i$$

[símbolo que significa: para todo vector $v \in \mathbb{R}^3$ se puede escribir como suma de tres vectores, v_c, v_e, v_i que pertenecen a los tres subespacios central, estable e inestable, respectivamente] : $v = v_c + v_e + v_i$.

Sobre la terminología espacio central: En el ejemplo 1.1.2 el origen es un centro con respecto a la restricción del flujo al espacio central. En este sentido este es *del centro* (igual a la traducción alternativa *centre manifold*), sin embargo, la variedad (el espacio) central no tiene porqué contener un centro si el sistema no es lineal):

EJEMPLO 1.1.3. Consideremos el sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ y^3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aquí el espacio central es el mismo del ejemplo 1.1.2 (misma parte lineal implica mismas raíces): el plano xy que también resulta ser invariante (en este caso especial): sin embargo la restricción del sistema a este

no tiene centro, si no foco estable, como se ve fácilmente mediante la función de Lyapunov

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

y el principio de invariancia.

[Por eso no tiene sentido decir *variedad del centro* (¿de cual centro, si no hay?), sino *variedad central* (en inglés también sería más claro *central manifold* que *centre manifold*); lo mejor sería *variedad (espacio neutral)*.] Ver Figura 1.2.

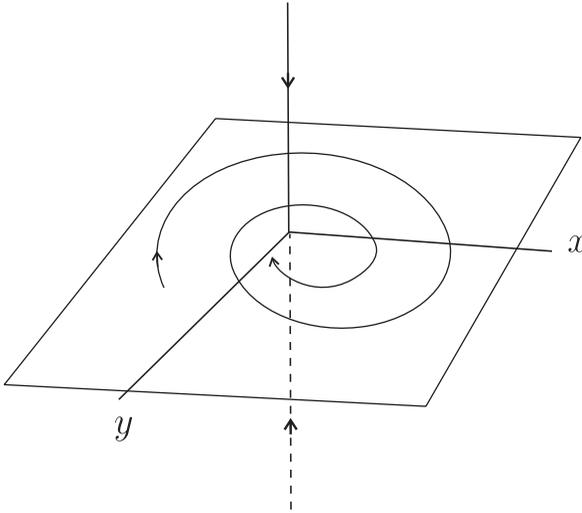


Figura 1.2

Si el espacio central es invariante (en sistemas lineales esto siempre es el caso) (como en los ejemplos 1.1.2 y 1.1.3), la *variedad central* se puede definir como el *espacio central* mismo. En sistemas no lineales esto en general no es el caso; como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.1.4. Consideremos el sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

Aquí los espacios E_c , E_e , E_i son los mismos de los ejemplos 1.1.2 y 1.1.3, pero $E_c = \{z = 0\}$ no es invariante (pues E_c es $\dot{z} = x^2 \neq 0$ salvo en $x = 0$). En estos casos el teorema de la variedad central dice que si $E_c \neq \emptyset$, existe una variedad V^c (subconjunto del espacio de estados

dado por ecuaciones diferenciales) invariante de la misma dimensión de E_c y que es tangencial a E_c en $\mathbf{0}$. (Ver Figura 4.1.)

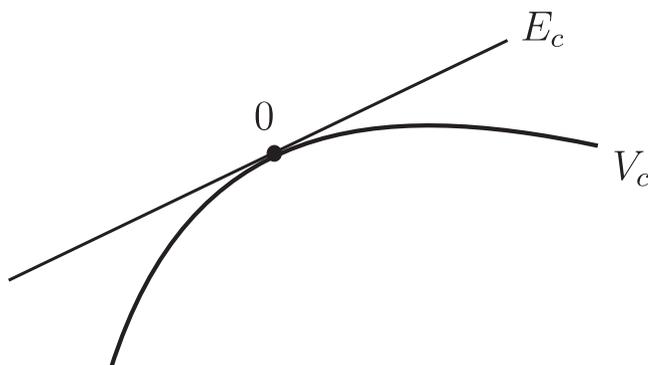


Figura 1.3

La idea de la teoría de la variedad central: Uno quiere averiguar la estabilidad del origen cuando un sistema que tiene algunas raíces de parte real menor que cero y otras de parte real igual a cero (como en los ejemplos 1.1.2, 1.1.3 y 1.1.4, anteriores; en el caso de existencia de raíces de parte real mayor que cero se sabe de antemano que $\mathbf{0}$ es inestable: hay soluciones [las de la *variedad inestable*] que se alejan).

Se prueba que en esta situación todas las soluciones tienden a la *variedad central* y el comportamiento del subflujo en esta determina por ende el comportamiento del flujo en total. (Ver Figura 1.4).

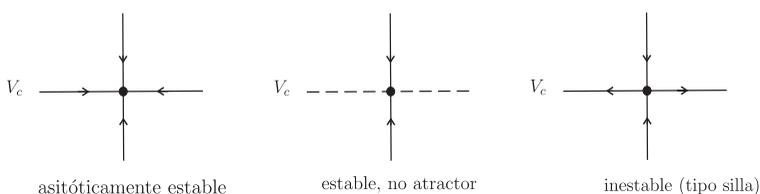


Figura 1.4

En la práctica se busca transformar las coordenadas, para llevar la variedad V_c a un subespacio lineal, para poder escribir el sistema reducido a la variedad central en estas nuevas coordenadas.

EJEMPLO 1.1.5. Consideremos el sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x^3 \\ x^4 \end{bmatrix}$$

$E_c = \{y = 0\}$, $E_e = \{x = 0\}$ [ya que los correspondientes autovalores son 0, y -1]. El segundo es invariante, así que coincide con la variedad estable, V_e ; la segunda en cambio no es invariante debido al término x^4 . Buscamos una curva

$$y = h(x)$$

invariante que sea tangencial a E_c en $(0, 0)$, es decir que sea en $(0, 0)$ con tangente horizontal, por lo tanto ponemos

$$y = a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

sustituyéndola en las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= h'(x)\dot{x} \\ &= -(2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots)x^3 \\ &= -y + x^4 \\ &= -h(x) + x^4 \\ &= -a_2x^2 - a_3x^3 - (a_4 - 1)x^4 - a_5x^5 - \dots \end{aligned}$$

$\Rightarrow a_2 = a_3 = 0$, $a_4 = 1$, $a_5 = 0$, $a_6 = 4, \dots$ y resulta

$$h(x) = x^4 + 4x^6 + \dots$$

Esta curva

$$y = h(x)$$

es la variedad central V_c . El flujo restringido a ella tiene $(0, 0)$ como punto asintóticamente estable (localmente), lo cual es claro ya que, por la primera ecuación, las soluciones todas tienden a $x = 0$. Se puede tomar x como coordenada local en V_e cerca de $(0, 0)$, ya que (localmente) la proyección vertical de V_e a la recta x es localmente biunívoca. [Formalmente, la función de Lyapunov $v = \frac{1}{2}x^2$ da: $\dot{v} = x\dot{x} = -x^4$ la cual es negativamente definida, por lo tanto $(0, 0)$ es asintóticamente estable.] Además V_e es (localmente) atractor, ya que (localmente) las órbitas van hacia $y = 0$, debido a la segunda ecuación.

{ La función de Lyapunov, $v = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ da:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= x\dot{x} + y\dot{y} \\ &= -x^4 - y^2 + yx^4 \\ &= -x^4(1 - y) - y^2 \end{aligned}$$

la cual es negativa definida en $\{y < 1\}$. Considerando la vecindad

$$|x| \leq 1, \quad y \leq 1$$

esta resulta positivamente invariante (ya que por la frontera superior y las laterales son de ingreso estricto por la segunda (primera ecuación respectivamente). Ver la Figura 1.5.

Para $y \rightarrow -\infty$ vale $v \rightarrow +\infty$ (condición de LaSalle), así que la región pertenece a la cuenca de $(0, 0)$, que es asintóticamente estable.}

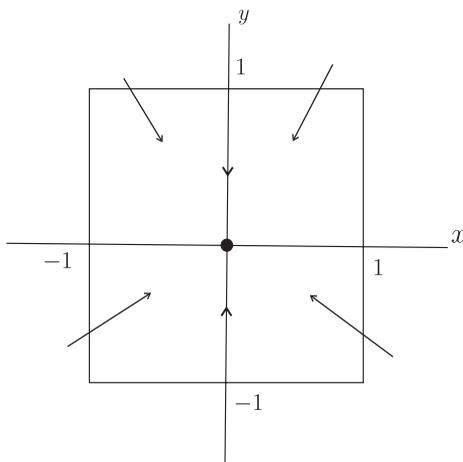


Figura 1.5

Teoría

Dada la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$, un conjunto S de su espacio de estados se dice *localmente invariante* si cualquier solución con punto inicial $x_0 \in S$ está en S durante un tiempo $t : |t| < T, T > 0$. [Si se puede tomar $T = \infty$, S es invariante]. Supongamos que la ecuación $\dot{z} = F(z)$ se puede dividir en dos tales que:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + f(x, y), \\ \dot{y} &= By + g(x, y).\end{aligned}\tag{1.1}$$

$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, donde A, B sean matrices constantes, f, g funciones de clase C^2 con $f(0, 0) = 0$, y lo mismo para f', g, g' [f', g' : matrices jacobianas], así que $z = 0$ es un equilibrio del sistema total,

$$\dot{z} = F(z).\tag{1.2}$$

Finalmente supongamos que todos los autovalores de A sean de parte real igual a cero, las partes reales de las de B todas menores que cero. Entonces $\{x = 0\}$ se llama *espacio estable* de (1.2), $\{y = 0\}$ *espacio central* del mismo. Si $f \equiv g \equiv 0$ [sistema lineal], ambos resultan invariantes, y se llama también, variedad estable, respectivamente central.

En el caso general, si $y = h(x)$ es una variedad invariante y liza (de clase C^1) y si

$$h(0), h'(0) = 0,$$

entonces $\{y = h(x)\}$ se llama *variedad central* de (1.2), denotada por V_c .

1.1.1. Teorema sobre la existencia de la variedad central.

TEOREMA 1.1.6. *Bajo las hipótesis formuladas, existe una variedad central de la forma $y = h(x)$, para $|x| < \delta$, con $h \in C^2$, $\delta > 0$, (variedad central local).*

[Demostración. Pendiente.]

El flujo en la variedad central está determinado por la ecuación

$$\dot{u} = Au + f(u, h(u)) \quad (1.3)$$

[Esta se obtiene de la primera ecuación (1.1) poniendo $u = x$, $h(u) = y$.]

Teorema sobre el comportamiento (local) del sistema (1.2) a partir del centro sistema *reducido*, (1.3).

TEOREMA 1.1.7. (a) *Supóngase que la solución trivial de (1.3) sea (asintóticamente) estable [Inestable]. Entonces la solución trivial de (1.2) (asintóticamente) estable [Inestable].*

(b) *Supóngase que la solución trivial de (1.3) sea estable. Sea $(x(\cdot), y(\cdot))$ una solución de (1.1) con $x(0)$, $y(0)$ suficientemente pequeños. Entonces existe una solución $u(\cdot)$ de (1.3) tal que $t \rightarrow +\infty$,*

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) + O(e^{-\gamma t}), \\ y(t) &= h(u(t)) + O(e^{-\gamma t}). \end{aligned} \quad (1.4)$$

para cierta constante $\gamma > 0$. { $O(y)$: función f con la propiedad $\|\frac{f}{y}\|$ es acotado }

Sustituyendo $y = h(x)$ en la segunda ecuación (1.1) se obtiene

$$h'(x)\dot{x} = Bh(x) + g(x, h(x))$$

o sea

$$h'(x)[Ax + f(x, h(x))] = Bh(x) + g(x, h(x)) \quad (1.5)$$

hay que agregar las condiciones iniciales,

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = 0$$

(Ya que V_c debe pasar por 0 y ser allí tangencial a $\{y = 0\}$, ver Figura 4.1) {Si por ejemplo el sistema es de dimensión 3 y E_c de dimensión 2, $x = (x_1, x_2)$, h es de la forma $h(x_1, x_2)$ y escalar, y la segunda condición es $h'(0, 0) = (\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y})(0, 0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial h}{\partial x}(0, 0) = 0, \frac{\partial h}{\partial y}(0, 0) = 0.$ }

La ecuación (1.5) es una ecuación diferencial para V_c [es decir, h], parcial si h depende de dos o más variables si $\dim E_c \geq 2$ (el número de variables de h es igual a la dimensión de E_c), y por eso no práctica para determinar V_c . Escribimos (1.5) en la forma

$$Mh(x) = 0,$$

donde M denota el operador diferencial

$$Mh = h'[A + f(x, h)] - Bh - g(x, h).$$

Tenemos el teorema siguiente que dice que si una función ϕ de la misma forma de h , decimos $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$, para la cual $M\phi$ es pequeña cerca de $\mathbf{0}$, entonces ϕ está cerca de h , siempre que satisfaga las mismas condiciones iniciales. [Esto es análogo a la dependencia continua de las soluciones de una ecuación diferencial (ordinaria) respecto al segundo miembro de esta (al campo vectorial), mientras al revés no tiene porqué ser cierto].

TEOREMA 1.1.8. *Sea ϕ una aplicación de clase C^1 de una vecindad del origen de \mathbb{R}^k en \mathbb{R}^m , con $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\phi'(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.*

Sea $(M\phi)(x) = o(|x|^q)$ para $x \rightarrow 0$, $q > 1$. Entonces $|h(x) - \phi(x)| = o(|x|^q)$.

EJEMPLO 1.1.9. Considérese el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xy + ax^3 + bxy^2, \\ \dot{y} &= -y + cx^2 + dx^2y.\end{aligned}$$

Por el Teorema 1.1.6, existe una variedad central $V_c : y = h(x)$ [siendo E_c igual al eje x , E_e el eje y]. Para una función ϕ (que aproxima h), se define el operador M como:

$$M\phi = \phi'[x\phi + ax^3 + bx\phi^2] - cx^2 + dx^2\phi$$

donde $\phi = \phi(x)$, $\phi' = \phi'(x)$ para satisfacer las condiciones iniciales, tiene que ser $\phi = O(x^2)$, i.e., $\phi(x) = x^2 + \dots$. Esto da

$$\begin{aligned}M\phi &= \underbrace{\phi' \left[\underbrace{x\phi}_{o(x)} + \underbrace{ax^3}_{O(x^3)} + \underbrace{bx\phi^2}_{O(x^5)} \right]}_{O(x^4)} + \phi - cx^2 + \underbrace{dx^2\phi}_{O(x^4)} \\ &= \phi - cx^2 + o(x^4).\end{aligned}$$

Si ponemos $\phi = cx^2$ (la última ecuación indica que esto es una buena aproximación), resulta $M\phi = o(x^4)$, y el teorema 1.1.8 da $h(x) = cx^2 + o(x^4)$.

Por el Teorema 1.1.7, la estabilidad de $\mathbf{0}$ para el sistema está determinado por la ecuación (1.3) que toma la forma

$$\dot{u} = \underbrace{\mathbf{0}}_{=Au} + uh(u) + au^3 + buh^2(u),$$

o sea

$$\dot{u} = cu^3 + au^3 + \underbrace{bc^2u^5 + cO(u^5) + (bc^2)O(u^9)}_{O(x^5)}, o$$

$$\dot{u} = (a + c)u^3 + o(u^5)$$

por lo tanto, $\mathbf{0}$ es asintóticamente estable si $a+c < 0$, inestable (repulsor) si $a+c > 0$. [En el caso $a+c = 0$ se necesita una mejor aproximación] { De hecho, $(a+c)u^3 + o(u^5) = (a+c)u^3[1 + o(u^2)]$, $[1 + o(u^2)]$ está cerca de 1 para u pequeño,] por lo tanto, la expresión tiene el signo de $(a+c)u$ cerca de $\mathbf{0}$. }

EJERCICIO 1.1. (a) Dar un criterio análogo al del caso $a+c = 0$ (mediante una aproximación más precisa de h).

(b) Pruebe que el sistema

$$\dot{x} = ax^3 + x^2y,$$

$$\dot{y} = -y + y^2 + xy - x^3.$$

es asintóticamente estable si $a \leq 0$ e inestable si $a > 0$.

(c) Tratar de la misma manera el ejemplo 1.1.5

$$\dot{x} = -x^3,$$

$$\dot{y} = -y + y^2 + x^4.$$

1.2. Demostraciones de los teoremas

1.2.1. Ejemplo preliminar.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g(x_1, x_2) \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

g es "lisa", y $g = o(x_1^2 + x_2^2)$ para $(x_1, x_2) \rightarrow \mathbf{0}$.

Mostrar que el sistema posee una variedad central local.

Modificación técnica: se define una función $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\Psi \in C^\infty$ con soporte compacto (i.e. $\Psi = \Psi(x_1, x_2) \equiv 0$ fuera de cierto conjunto compacto), y tal que $\Psi \equiv 1$ en cierta vecindad de $\mathbf{0}$, (en el plano (x_1, x_2)). Después se reemplaza g por la función:

$$G(x_1, x_2) = \Psi(x_1, x_2)g(x_1, x_2).$$

[así que $G \equiv g$ en una vecindad de $\mathbf{0}$, y G es de soporte compacto]

Entonces se reemplaza (1.6) por el sistema localmente idéntico y lineal salvo en un conjunto compacto:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G(x_1, x_2) \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Demostrar que este tiene una variedad central $y = h(x_1, x_2)$ global:

[Esto implicará que (1.6) tiene como variedad central (local) la misma superficie (por ser localmente idéntica).]

La solución de las primeras dos ecuaciones de (1.6) es

$$x_1(t) = c_1 + c_2 t, \quad x_2(t) = c_2$$

(c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.)

Sustituyendo esto en la tercera ecuación de (1.6) da

$$\frac{d}{dt} = \underbrace{h(c_1 + c_2 t, c_2)}_{=:g^*(t)} = \underbrace{-h(c_1 + c_2 t, c_2)}_{=:g^*(t)} + \underbrace{G(c_1 + c_2 t, c_2)}_{=:H(t)}$$

Mediante variación de las constantes esta da:

$$g^*(t) = \int_{t_0}^t e^s H(s) ds,$$

t_0 juega el papel de una constante de integración, la cual se puede fijar (por ejemplo) en $t_0 = -\infty$

[pues a $t = -\infty$ corresponde $x_1 = -\infty$, lo cual corresponde a $G = 0$ (por tener soporte compacto)].

$g^*(0)$ da $h(c_1, c_2)$, así que

$$h(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^0 e^s G(x_1 + x_2 s, x_2) ds$$

Ahora $y = h(x_1, x_2)$ es una variedad invariante:

Fijamos como punto inicial: (c_1, c_2, c_3) , donde c_3 debe ser el valor

$$\int_{-\infty}^0 e^s H(s) ds.$$

Para que $\{ y = h(x_1, x_2) \}$ sea invariante, tiene que ser, para toda t , $(c_1 + c_2 t, c_2, e^{-t} \int_{-\infty}^t e^s G(c_1 + c_2 s, c_2) ds)$ un punto de la misma superficie, lo cual equivale a la identidad

$$e^{-t} \int_{-\infty}^t e^s G(c_1 + c_2 s, c_2) ds = \int_{-\infty}^0 e^u G(c_1 + c_2 t + c_2 u, c_2) du$$

Hacemos la sustitución $s = t + u$, la cual transforma el segundo miembro en

$$\int_{-\infty}^t e^{s-t} G(c_1 + c_2 s, c_2) ds$$

lo cual es lo mismo que el primer miembro de la ecuación. \square

1.2.2. Demostración del teorema. Dado el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + f(x, y), \quad (x \in \mathbb{R}^k) \\ \dot{y} &= By + g(x, y), \quad y \in \mathbb{R}^m.\end{aligned}\tag{1.8}$$

Los eigenvalores de A de parte real igual a cero, los de B de parte real menor que cero, $f, g \in C^2$, $f(0, 0) = \mathbf{0}$, $f'(0, 0) = \mathbf{0}$, $g(0, 0) = \mathbf{0}$ y $g'(0, 0) = \mathbf{0}$, f' y g' son las matrices jacobianas de f y g respectivamente.

TEOREMA 1.2.1. *La ecuación (1.8) tiene una variedad central $y = h(x)$, local, i.e. para $|x| < \delta$ ($\delta > 0$), con $h \in C^2$.*

Demostración. Se reemplazan las funciones f y g por funciones F y G de clase C^2 , e idénticas a f y g respectivamente en una vecindad del origen $\mathbf{0}$, y de soporte compacto (como en el ejemplo).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + F(x, y), \quad (x \in \mathbb{R}^k) \\ \dot{y} &= By + G(x, y), \quad y \in \mathbb{R}^m.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Sean $L > 0$, $b > 0$, y X el espacio lineal de funciones $h : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ con constante de Lipschitz L y cota $\|h\| \leq b$, y $h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Tomando como norma la del supremo, el espacio X es completo. { Pues si $\{h_n\} \subset X$ es una sucesión de Cauchy entonces para toda x tal que $\{h_n(x)\}$ es una sucesión de C ; definimos $\lim h_n = h$ por $h(x) = \lim h_n(x)$, la cual obviamente tiene la misma cota b , y es Lipschitz con la misma constante L :

$$h(x) - h(x') = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{(h_n(x) - h_n(x'))}_{\leq \|x - x'\| L} \leq \|x - x'\| L$$

y por definición $h_n(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, por lo tanto, $h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, y $h \in X$. }

Para $h \in X$, $x_0 \in \mathbb{R}^k$, sea $x(t, x_0, h)$ la solución de

$$\dot{x} = Ax + F(x, h(x)), \quad x(0, x_0, h) = x_0\tag{1.10}$$

Las hipótesis garantizan la existencia de $x(t, x_0, h)$ para toda t .

Ahora definimos un operador T que lleva h en una nueva función Th mediante

$$(Th)(x_0) = \int_{-\infty}^0 e^{-Bs} G(x(s, x_0, h), h(x(s, x_0, h))) ds,\tag{1.11}$$

$$(e^{-Bs} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-Bs)^n}{n!}.)$$

Si h es un punto fijo de T (i.e. $Th = h$), se define una variedad central. Para ver esto se procede como en el ejemplo preliminar: h satisface entonces en caso de ser punto fijo, la identidad

$$h(x) = \int_{-\infty}^0 e^{-Bs} G(h(s, x), h(h(s, x))) ds,$$

y consideremos la solución de (1.7) con el valor inicial, $z_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 = h(x_0) \end{bmatrix}$ $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, la cual denotamos por $z(t, z_0)$.

Para que el conjunto $\{y = h(x)\}$ sea invariante es necesario y suficiente que la solución $z(t, z_0)$ quede en él para cualquier z_0 que pertenece a este conjunto.

Esto se expresa mediante la identidad,

$$y(t, x_0, h(x_0)) = h(x(t, x_0, h)) \quad (1.12)$$

donde $y(t, x_0, h(x_0))$ denota la componente y de $z(t, z_0)$ es decir, la solución de la ecuación

$$\dot{y} = By + G(x(t, x_0, h), y).$$

(Ver Figura 1.6)

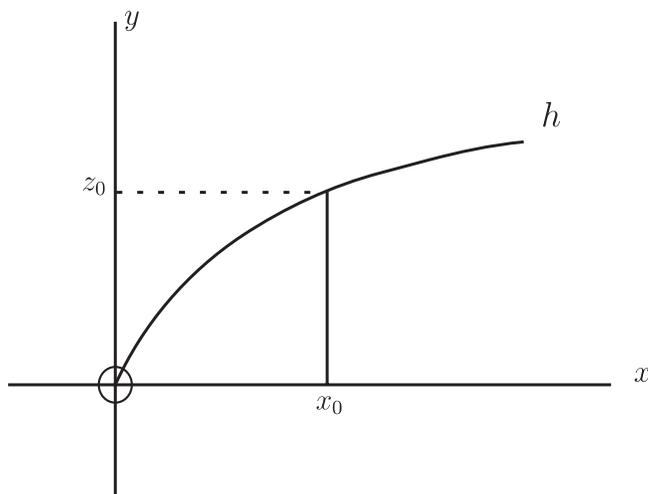


Figura 1.6

El método de variación de las constantes da

$$y(t, x_0, h(x_0)) = e^{Bt} \int_{-\infty}^t e^{-Bs} G(x(s, x_0, h), h(x(s, x_0, h))) ds \quad (1.13)$$

{ Sobre la elección de $t_0 = -\infty$: En el ejemplo, para $|t|$ grande G era igual a 0; en general esto no tiene porqué ser el caso; se puede tomar para t_0 valor cualquiera. } (1.12) y (1.13) dan

$$h(x(t, x_0, h)) = e^{Bt} \int_{-\infty}^t e^{-Bs} G(x(s, x_0, h), h(x(s, x_0, h))) ds,$$

identidad que hay que confirmar

Si h es punto fijo, el primer miembro de esta ecuación es igual a $Th(x(t, x_0, h))$, o sea sustituyendo en (1.11) por $x(s, x_0)$

$$h(h(t, x_0)) = \int_{-\infty}^0 G(h(s, h(t, x_0)), h(h(s, h(t, x_0)))) ds,$$

(suprimiendo " h " en $x(t, x_0, h)$); a fin de cuentas debe valer la identidad

$$e^{Bt} \int_0^t e^{-Bs} G(h(s, x_0), h(h(s, x_0))) ds = \int_{-\infty}^0 e^{-Bs} G(x(s, h(s, x_0)), h(s, x_0)) ds$$

Como en el caso especial, ponemos $u = t + s$, y el segundo miembro de la ecuación se convierte en

$$e^{Bt} \int_0^t e^{-Bu} G(\underbrace{x(u-t, x(t, x_0))}_{x(u, x_0)}, h(u-t, x_0)) ds$$

lo cual coincide con el primer miembro de la ecuación en cuestión. La afirmación queda probada.

Ahora se prueba que para las constantes, L, b dadas y $\epsilon > 0$ pequeño, T es una contracción en el espacio funcional X , para aplicar el teorema de punto fijo de Banach [Ir]: En un espacio normado completo X una aplicación $T : X \rightarrow X$ que es *contráctil* en el sentido de que $\exists \alpha < 1$ ($\alpha > 0$) tal que

$$\forall x \in X : \|T(x) - T(y)\| \leq \alpha \|x - y\|$$

posee un punto fijo, y este es único. [La unicidad es trivial pues si $Tx = x, Ty = y, \|Tx - Ty\| = \|x - y\|$ y si $x \neq y, \alpha$ sea 1; la completitud es necesaria: Tome $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}, T : x \mapsto \frac{1}{2}x$. Es contracción, no tiene punto fijo (pues 0 es el punto fijo.)] T es *contráctil*: existe una función continua $k(\epsilon)$ con $k(0) = 0$, tal que

$$\begin{aligned} |F(x, y)| + |G(x, y)| &\leq \epsilon k(\epsilon) \\ |F(x, y) - F(x', y')| &\leq k(\epsilon)[|x - x'| + |y - y'|], \\ |G(x, y) - G(x', y')| &\leq k(\epsilon)[|x - x'| + |y - y'|]. \end{aligned} \quad (1.14)$$

$\forall x, x' \in \mathbb{R}^k, y, y' \in \mathbb{R}^m$ con $|y|, |y'|, |x|, |x'| < \epsilon$. por ser $F \in C^2, F(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, F'(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$; la segunda ecuación por el teorema del valor medio aplicado a ambas variables por separado.

$$F(x, y) - F(x', y') = [F(x, y) - F(x', y)] + [F(x', y) - F(x', y')]$$

Debido a la hipótesis sobre los autovalores de $B, \exists \beta, C > 0$: para $s \leq 0, y \in \mathbb{R}^m$:

$$|e^{-Bs} y| \leq C e^{\beta s} |y| \quad (1.15)$$

y $\forall r > 0, \exists M(r)$:

$$|e^{-As} y| \leq M(r) e^{r|s|} |x| \quad (s \in \mathbb{R}, \mathbb{R}^k). \quad (1.16)$$

[Posiblemente $M(r) \rightarrow \infty$ con $r \rightarrow 0$].

En adelante, se supone $b < \epsilon$. La ecuación (1.11) da la estimación:

$$\begin{aligned}
 |Th(x_0)| &\leq \int_{-\infty}^0 |e^{-Bs} G| ds \\
 &\leq C \int_{-\infty}^0 e^{\beta s} \underbrace{|G|}_{\leq \epsilon k(\epsilon) \text{ por (1.14)}} ds \\
 &\leq C \epsilon k(\epsilon) \frac{1}{\beta} \cdot 1
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

(con 1 reemplazado por $1 - e^{\beta t_0}$ si se toma la integral $\int_{t_0}^0 e^{\beta s} ds$; en cualquier caso otra constante que se pueda juntar con C .) Para la continuación ver [Ca], pp. 18-19. \square

Sistemas dinámicos.

2.1. Introducción.

Muchos resultados básicos de la Teoría Cualitativa de ecuaciones diferenciales no dependen de la diferenciabilidad de las soluciones, si no sólo de sus propiedades topológicas y de la estructura algebraica de la recta de los números reales (o de los enteros). Esta consideración ha dado origen a la disciplina que se llama *Dinámica topológica o Teoría de grupos de transformaciones*, donde se definen “sistemas dinámicos” axiomáticamente como familias de funciones (“movimientos”) de dos variables, una de las cuales (es el “valor inicial”) pertenece a un espacio topológico o métrico (el “espacio estado” o “espacio fase”; aquí suponemos que sea un espacio métrico), y la otra parte (el “tiempo”) a la recta real (\mathbb{R}) o a veces los números enteros (\mathbb{Z}).

Cuando el espacio estado está dotado de una estructura diferenciable (en particular, es un espacio euclideo o una variedad diferenciable) se puede exigir además que los movimientos sean diferenciables con respecto al tiempo. En este caso el sistema define una ecuación diferencial. Al revés cada ecuación diferencial autónoma que satisface las condiciones de existencia global, unicidad de dependencia continua de ambas variables, define un sistema dinámico. Entonces se habla de un sistema dinámico diferenciable.

A los sistemas dinámicos en general se les llama a veces también “acciones reales” (respectivamente de los enteros) sobre un espacio. Por otra parte, la Teoría de los Sistemas Dinámicos se puede aplicar también a objetos que no sean ecuaciones diferenciales, como ecuaciones en diferencias (con \mathbb{Z} como “escala de tiempo”), ecuaciones funcionales-diferenciales, ecuaciones integrales o ecuaciones diferenciales parciales (las cuales se representan como sistemas dinámicos en un espacio de dimensión infinita). Aquí desarrollaremos solamente las ideas más indispensables de la teoría de los sistemas dinámicos.

2.2. El Concepto de sistema dinámico

Para las definiciones básicas, la clase apropiada de espacios en los cuales se definen los sistemas es la de los espacios topológicos ,

aunque más adelante será conveniente suponer una métrica. Por eso supongamos por el momento que el espacio estado sea un espacio topológico X .

DEFINICIÓN 2.2.1. Un *sistema dinámico* es una terna, (X, \mathbb{R}, π) , donde X denota un espacio topológico y π una función continua del espacio producto $X \times \mathbb{R}$ en X :

$$\pi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X,$$

que satisface los axiomas siguientes:

(I) [Axioma de identidad];

$$\pi(x, 0) = x, \quad (\forall x \in X) \quad (2.1)$$

(II) [Axioma de grupo o de homomorfía];

$$\pi(\pi(x, t_1), t_2) = \pi(x, t_1 + t_2), \quad (\forall x \in X, t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}). \quad (2.2)$$

Es muy conveniente reemplazar la notación $\pi(x, t)$ por otra, más breve, escribiendo simplemente xt . Con esta, las ecuaciones (2.1) y (2.2) correspondientes a los axiomas I y II se escriben simplemente como

$$x0 = x; \quad (2.3)$$

$$(xt_1)t_2 = x(t_1 + t_2). \quad (2.4)$$

2.3. Los conceptos básicos relacionados con sistemas dinámicos.

DEFINICIÓN 2.3.1. A cada punto $x \in X$ se le asocia un *movimiento*, a saber, la función $\pi(x, t)$, con x fijo, la cual es una función de t solamente. La escribimos como $\pi_x(t)$.

PROPOSICIÓN 2.3.2. Si el movimiento π_x pasa por un punto x_1 , decimos $x_1 = \pi_{x_1}(t_1)$, vale entre dos movimientos π_x y π_{x_1} , la relación

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad \pi_x(t) = \pi_{x_1}(t - t_1).$$

Demostración: En efecto aplicando (2.4), obtenemos:

$$\pi_{x_1}(t - t_1) = x_1(t - t_1) = (x_1 t_1)(t - t_1) = xt.$$

□

DEFINICIÓN 2.3.3. El rango de la función π_x se llama *órbita* (o *trayectoria*) asociada al punto x , y se denota por $\gamma(x)$:

$$\gamma(x) := \{\pi_x(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Análogamente, se definen la *semiórbita positiva* y *negativa*:

$$\gamma^\pm(x) := \{\pi_x(t) \mid t \in \mathbb{R}^\pm\},$$

($\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0]$).

PROPOSICIÓN 2.3.4. *Dos órbitas cualesquiera, $\gamma(x_1)$ y $\gamma(x_2)$, o coinciden o son ajenas.*

Demostración: Ejercicio.

DEFINICIÓN 2.3.5. La *transformación* π^t del espacio X sobre si mismo, correspondiente al tiempo t , está definida como

$$\pi^t(x) := xt.$$

PROPOSICIÓN 2.3.6. *Las transformaciones π^t forman un grupo que es homomorfo al grupo aditivo de \mathbb{R} .*

Demostración.

(i) Sean $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\pi^{t_1} \circ \pi^{t_2} = \pi^{t_1+t_2}.$$

(De hecho, esta identidad, aplicada a un punto x , es sólo otra manera de escribir la ecuación 2.2 correspondiente al axioma II).

(ii) El elemento neutral del grupo es π^0 . De hecho, la identidad (2.2) da en este caso:

$$\pi^0 \circ \pi^t = \pi^{t+0}.$$

Además, debido al axioma 2.1, π^0 , es la transformación idéntica:

$$\pi^0(x) = x.$$

(iii) El elemento inverso a π^t es obviamente π^{-t} , ya que la identidad (2.2) da $\pi^{-t} \circ \pi^t = \pi^{t-t} = \pi^0$.

Además observamos que el grupo de las transformaciones π^t es *conmutativo*. Esto es una consecuencia inmediata de la identidad (1.2) y la conmutatividad de la adición de los números reales.

DEFINICIÓN 2.3.7. Un conjunto $M \subset X$ se dice *invariante*, si para cada punto $x \in M$ vale: $\gamma(x) \subset M$.

Otras maneras de expresar esta propiedad son las siguientes.

- (a) M es una unión de órbitas. De hecho, se puede escribir como $M = \bigcup \{\gamma(x) \mid x \in M\}$ donde, por supuesto, hay que tomar en cuenta que $\gamma(x)$ es la misma órbita como $\gamma(y)$ si x e y pertenecen a la misma órbita [Proposición 2.3.4].
- (b) Ninguna órbita *entra* o *sale* de M .

Aquí, $\gamma(x)$ entra en M quiere decir que existen t_1 y t_2 tales que $t_1 < t_2$ y $xt_1 \notin M$ mientras que $xt_2 \in M$.

El concepto de *salir* es el análogo, sólo con la desigualdad $t_1 > t_2$ en lugar de la otra.

Convención notacional: Una función de punto a conjunto (como por ejemplo la función que asigna a cada punto x su órbita $\gamma(x)$), aplicada a un conjunto, significa que se le aplica a cada punto del conjunto y después toma la unión.

EJEMPLO 2.3.8.

$$\gamma(A) := \bigcup \{ \gamma(x) \mid x \in A \}, \quad (A \subset X).$$

Usando esta, la calidad de invariante se puede expresar también en la forma

$$M = \gamma(M). \quad (2.5)$$

Por eso la invariancia está mejor caracterizada por la relación

$$M \supset \gamma(M). \quad (2.6)$$

De hecho la inclusión \supset es consecuencia inmediata de la definición, mientras la opuesta expresa simplemente el hecho de que cada punto pertenece a su propia órbita [axioma I], y por ende vale para cualquier conjunto.

PROPOSICIÓN 2.3.9. a) *Uniones e intersecciones de conjuntos invariantes de conjuntos invariantes son invariantes.*

b) *Si M es un conjunto invariante, su interior $\overset{\circ}{M}$, cerradura \overline{M} , frontera ∂M y complemento CM también son conjuntos invariantes.*

Demostración. a) Sea $\{M_i\}$ una colección de conjuntos invariantes, y $M = \bigcap M_i$ de acuerdo con la caracterización (2.6) tenemos que probar $M \supset \gamma(M)$. Sea $x \in \gamma(M)$, entonces entonces existen x' y t tales que $x' \in M$ y $x = x't$, lo cual implica $\forall i, x' \in M_i$, por ende, $\forall i, x \in \gamma(M_i) = M_i$, o sea $x \in \bigcap M_i = M$. Esto prueba la inclusión en cuestión.

La demostración para el caso de una unión de conjuntos invariantes la dejamos como ejercicio.

b) Probamos primero que la cerradura de un conjunto invariante es invariante. Sea, M invariante, por ende $M = \gamma(M)$, y $y \in \gamma(\overline{M})$. Debido a la caracterización (2.6), se trata entonces de probar que $y \in \overline{M}$. De hecho, existen $x \in \overline{M}$, t tales que $y = xt$, y $x_n \in M$ tales que $x_n \rightarrow x$. Debido a la continuidad de π con respecto a la variable de estado, vale $x_n t \rightarrow xt = y$; ya que $x_n t \in M$ debido a la invariancia de este último, obtenemos $y \in \overline{M}$.

En seguida probamos que el complemento CM de un conjunto invariante M es invariante. De hecho, si M fuese invariante y CM no, existirían $x \in CM$ y t tales que $y = xt \in M$. Por la invariancia de M debería estar $x = y(-t)$ también en M , lo cual es una contradicción.

Ahora queda probado también que $\overset{\circ}{M}$ es invariante si M lo es, por concluir sucesivamente que $\mathcal{C}M$, $\overline{\mathcal{C}M} = \mathcal{C}\overset{\circ}{M}$ y $\overset{\circ}{M} = \mathcal{C}\overline{\mathcal{C}M}$ son invariantes. Finalmente, que la frontera ∂M de un conjunto M es invariante, se desprende de la identidad $\partial M = \overline{M} \cap \overline{\mathcal{C}M}$.

DEFINICIÓN 2.3.10. El conjunto $M \subset X$ es *positivamente invariante* (*negativamente invariante*) si vale $\gamma^+(M) = M$ ($\gamma^-(M) = M$). [Estas dos reacciones son obviamente equivalentes a $\gamma^\pm(M) = M$, respectivamente, ya que $M \subset \gamma^\pm(M)$ valen siempre.]

En otras palabras, un conjunto M es positivamente (negativamente) invariante si órbitas pueden posiblemente *entrar* (*salir*), pero no *salir* de (*entrar* en) M . Un conjunto es positivamente invariante y negativamente invariante. Si tiene una de las dos últimas propiedades, lo llamamos, genéricamente, *semi-invariante*.

La Proposición (2.3.9) vale igualmente para los dos tipos de semi-invariancia, salvo las partes del inciso b) que se refiere al complemento y a la frontera. De hecho, si M , por ejemplo, es positivamente invariante, pero no negativamente invariante, hay órbitas que pasan de $\mathcal{C}M$ a M a través de la frontera ∂M , y ésta, en consecuencia, no puede ser ni negativamente invariante, ni positivamente invariante. Tenemos entonces la proposición siguiente.

PROPOSICIÓN 2.3.11. *Si M es positivamente invariante, $\mathcal{C}M$ lo es negativamente, y viceversa.*

La demostración es un ejercicio trivial.

2.4. Cerraduras de órbitas y semiórbitas. Conjuntos límites.

De ahora en adelante, supongamos que el espacio X sea un espacio métrico.

Introducimos las respectivas cerraduras de las dos semiórbitas y de la órbita que corresponden a un punto x :

$$\overline{\gamma^\pm(x)} \quad \overline{\gamma(x)}.$$

Un aspecto importante de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales es el comportamiento asintótico de los movimientos, cuando t va hacia $\pm\infty$. En otras palabras, se trata de responder la pregunta:

¿A donde van los movimientos cuando t tiende a $\pm\infty$?

Esto explica la importancia de los *puntos límites*¹ de un punto o de una trayectoria.

¹Introducidos por G. D. Birkhoff (1884-1944).

DEFINICIÓN 2.4.1. El *conjunto límite positivo* (*negativo*), o *conjunto límite* ω (α) correspondiente a x es el conjunto de todos los puntos y para los cuales existe una sucesión (t_n) tal que

$$t_n \rightarrow +\infty(-\infty), \quad xt_n \rightarrow y.$$

A los conjuntos límites los de y los denotaremos por $\Lambda^\pm(x)$.

Los puntos que conforman estos dos conjuntos se llaman *puntos límites positivos* (*negativos*) [*o puntos límites* ω (α)] de x .

TEOREMA 2.4.2. a) *Puntos de una misma órbita poseen los mismos conjuntos límites. Por eso se justifica hablar de los conjuntos límites de una órbita.*

b) *Los conjuntos límites son invariantes.*

c) *Los conjuntos límites son cerrados.*

d) $\Lambda^\pm(x) = \bigcap \{ \overline{y^\pm(xt)} \mid t \in \mathbb{R} \}$.

e) $\overline{y^\pm(x)} = y^\pm(x) \cup \Lambda^\pm(x)$.

f) *Si la semiórbita $y^\pm(x)$ es acotada, y si el espacio X tiene la propiedad de que cualquier conjunto cerrado, acotado es compacto (como el caso de los espacios euclidianos) los conjuntos límites son no vacíos.*

Demostración. a) y b) los proponemos como ejercicios. c) será una consecuencia de la parte d). Prueba para d). Probaremos primero que $\Lambda^+(x) \subset \overline{y^+(xt)}$ vale para cualquier $t \in \mathbb{R}$. [La relación análoga para $\Lambda^-(x)$ se prueba de la misma manera.] De hecho, a cada $y \in \Lambda^+(x)$ se le asocia una sucesión (t_n) tal que $t_n \rightarrow +\infty$ y $xt_n \rightarrow y$.

Obviamente, $t_n > t$, para todo n salvo un número finito. Entonces es claro que $y \in \overline{y^+(xt)}$, ya que $xt_n = (xt)(t_n - t) \in y^+(xt)$, para casi todos los n .

Para probar la inclusión inversa, (otra vez, sólo para Λ^+) consideramos un punto y que pertenece a todos los conjuntos $\overline{y^+(xt)}$, $t \in \mathbb{R}$ (ver la parte d) del teorema 2.4.2). Observemos primero que la definición de $\Lambda^+(x)$ se puede reformular de la siguiente manera:

$y \in \Lambda^+(x)$ si y sólo si, para cualquier vecindad U de y y cualquier $t > 0$, existe un valor $t' > t$ y un punto $y' \in U$ tales que $y' = xt' \in U$. Debido a lo dicho arriba, esto implica que $y \in \Lambda^+(x)$.

Para probar e), observemos primero que la inclusión " \supset " correspondiente es una consecuencia inmediata de la parte d) (poniendo $t = 0$). Para probar la inclusión contraria, sea por ejemplo, $y \in \overline{y^+(x)}$, y sean $y_n \in y^+(x)$ tales que $y_n \rightarrow y$, y $t_n \geq 0$ tales que $y_n = xt_n$. Si (t_n) es acotada, existe una subsucesión convergente, t'_n , tal que $xt'_n \rightarrow xt$, $t \geq 0$. Así que en este caso, $y \in y^+(x)$.

El mismo argumento vale siempre que (t_n) contenga una sub-sucesión acotada (y por ende una convergente). Queda por considerar únicamente el caso $t_n \rightarrow +\infty$, en el cual obviamente vale $\gamma \in \Lambda^+(x)$.

Finalmente para probar la parte f), consideremos una sucesión cualquiera (t_n) que tiende a $+\infty$. Siendo la sucesión (xt_n) relativamente compacta, ella posee una subsucesión convergente cuyo límite es un punto de $\Lambda^+(x)$. \square

[Para un espacio métrico cualquiera, el conjunto límite de una semiórbita si puede ser vacío. Sea por ejemplo, X el intervalo $(0, +\infty)$ y la ecuación $\dot{x} = -x$ dada entonces las soluciones (que son $x(t) = x_0 e^{-t}$) tienen conjunto límite $\Lambda^+(x_0)$ vacío.]

La relación e) del teorema 2.4.2 puede servir como punto de partida para una primera clasificación de las órbitas. En primer lugar, se puede hacer la distinción siguiente:

Caso A: Los conjuntos $\gamma^\pm(x)$ y $\Lambda^\pm(x)$ son ajenos.

Caso B: Los dos conjuntos tienen por lo menos un punto en común.

En lo que sigue nos limitamos al caso de semiórbitas y conjuntos límites positivos.

Empezamos con el caso B), suponiendo la existencia de $t \geq 0$ tal que $xt \in \Lambda^\pm(x)$. Entonces debido a la propiedad b) del teorema 2.4.2, toda la órbita $\gamma^+(x)$ pertenece a $\Lambda^+(x)$:

$$\gamma(x) \subset \Lambda^+(x) \tag{2.7}$$

En particular, $x \in \Lambda^+(x)$. Esto prueba que el caso B) coincide con la clase de órbitas que caen bajo la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.4.3. Un punto x [o su órbita $\gamma(x)$ o movimiento π_x] es positivamente estable en el sentido de Poisson, abreviado P^+ -estable si satisface la condición

$$x \in \Lambda^+(x).$$

Análogamente se define el concepto de P^- -estable ²

Una subdivisión natural de las órbitas Poisson-estables se obtiene haciendo una distinción entre de los casos siguientes:

B_1) La inclusión (2.7) es estricta:

$$\gamma^+(x) \subsetneq \Lambda^+(x).$$

B_2) La misma inclusión (2.7) es invertible:

$$\gamma^+(x) = \Lambda^+(x).$$

²Según otra terminología, en lugar de P^\pm -estable se dice también (positiva/negativamente) *recurrente*. Sin embargo, hay en este uso del término recurrente una cierta ambigüedad, porque el mismo término se usa también en un sentido más restringido (parecido al concepto de casi-periodicidad). Véase [NS].

El segundo caso se presenta cuando $\gamma(x)$ es una órbita periódica, y en particular, cuando es un *punto crítico, o de reposo, o punto de equilibrio*, $\gamma(x) = \{x\}$. Antes de considerar el caso con más detalle, nos preguntamos si el caso $B_1)$ es posible.

Cuando se trata de un flujo en el plano, el caso $B_1)$ no puede ocurrir. [En el caso de que éste sea definido por ecuaciones diferenciales, esto es una consecuencia de la teoría de Poincaré- Bendixson.] En cambio si es posible cuando se trata de flujos en otros espacios, por ejemplo en un toro. De hecho construiremos un flujo en el toro $T^2 = S^1 \times S^1$, que exhibe este comportamiento, de la siguiente manera.

Partimos de sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1, \\ \dot{y} &= \alpha,\end{aligned}\tag{2.8}$$

donde α sea un número irracional; supongamos $\alpha > 0$, aunque esto no es esencial. Además fijamos un punto inicial $(0, y_0)$, $(0 \leq y_0 < 1)$. Identificando los lados del cuadrado unitario, $x = 0$ con $x = 1$, y $y = 0$ con $y = 1$, obtenemos el toro T^2 . El flujo sobre este ("flujo cociente") se obtiene reduciendo cada órbita del flujo en el plano "módulo 1" (reduciendo cada coordenada a 0 cuando alcanza el valor 1). Los puntos de intersección de la semiórbita en T^2 que corresponde a la semiórbita definida arriba, con el círculo $x = 0$ del toro, se determinan por sus coordenadas y reducidas $\pmod{1}$ que toman valores:

$$y_n = y_0 + \alpha n \pmod{1}.$$

Según un teorema de Kronecker, estos números forman un conjunto denso en el intervalo $[0, 1]$, y ya que la semiórbita intersecciona un círculo $x = x_1$ ($0 \leq x_1 < 1$) cualquiera en puntos $y_n^{x_1} := y_n + \alpha x_1$, se ve que la semiórbita forma un conjunto denso en el toro, mientras que esta misma forma, por su puesto, un subconjunto propio de él. Ver Figura 2.1

Una pequeña modificación de este ejemplo nos da un ejemplo de órbitas que son sólo unilateralmente Poisson-estables (P^+ o P^-). Para este fin introducimos en T^2 las coordenadas toroidales φ, θ (que corresponden en el ejemplo anterior a $2\pi x$, respectivamente $2\pi y$ reducidas $\pmod{1}$) y consideramos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ \dot{\theta} &= \alpha \left(\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Las órbitas de este son las mismas como en el último ejemplo, pues satisfacen la misma ecuación diferencial $\frac{d\theta}{d\varphi} = \alpha$, equivalente de $\frac{dy}{dx} = \alpha$, con la única excepción que a los valores $\varphi = 0, \theta = 0$ les corresponde

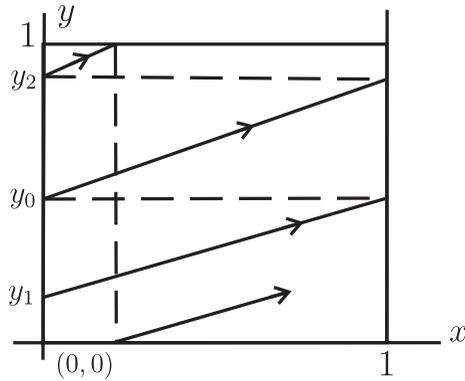


Figura 2.1. Ilustración del ejemplo.

un punto crítico, siendo allá $\dot{\varphi} = \dot{\theta} = 0$. Representamos el toro por el cuadrado

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

identificando lados opuestos. Ver la Figura 2.2

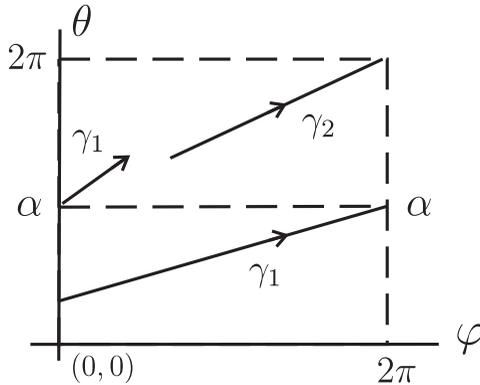


Figura 2.2. Ilustración de la demostración

El único punto crítico corresponde a las cuatro esquinas del cuadrado, y las demás trayectorias a sucesiones de trozos de rectas de pendiente α . Al punto crítico lo denotamos por P_0 . En particular, hay exactamente órbitas, γ_1 y γ_2 , que abarcan trozos de rectas que pasan por las esquinas del cuadrado. Si α es irracional, estas dos órbitas serán diferentes (por el teorema de Kronecker mencionado). Denotando por γ_1 la órbita que primero se aleja de punto crítico para t creciente. Este último es, por ende, el (único) punto límite negativo de γ_1 . En

consecuencia, γ_1 no es P^- -estable. Por otra parte, igual como en el caso anterior, γ_1 intersecta al círculo $C : \varphi = 0$ en un conjunto denso, por cual razón existen, si fijamos un punto $p \in \gamma_1$, valores t_n tales que $pt_n \rightarrow p' \in C$ cualquiera; obviamente, $t_n \rightarrow +\infty$. [Pues $t_n \rightarrow -\infty$ es imposible, ya que para $t \rightarrow -\infty$ el movimiento tiende a p_0 sin cruzar C , y por otra parte sus puntos de intersección con este son aislados en t (diferiendo los instantes en que cruzan entre si por múltiplos de 2π). Por esta razón la sucesión (t_n) no puede tener ninguna subsucesión acotada.] Resulta que $C \subset \Lambda^+(p)$, y por ende $\Lambda^+(p) = T^2$ (ya que lo mismo vale para cualquier círculo $\varphi = \text{constante}$.) Así que tenemos

$$\{p_0\} = \Lambda^-(p), \quad \gamma(p) \subsetneq \Lambda^+(p) = T^2,$$

lo cual prueba que γ_1 es P^+ -estable, pero no P^- -estable. Análogamente se ve que γ_2 es P^- -estable, pero no P^+ -estable.

Caso B_2). Probaremos el siguiente

TEOREMA 2.4.4. *El punto x es periódico si y sólo si vale la identidad*

$$\gamma^+(x) = \Lambda^+(x) \tag{2.10}$$

[O la análoga, $\gamma^-(x) = \Lambda^-(x)$].

Demostración. a) Supóngase que se cumpla (2.10). Entonces, por la invariancia de $\Lambda^+(x)$, vale también $\Lambda^+(x) = \gamma(x)$. Esto implica que para cualquier $y = x(-t)$ ($t > 0$), existe un $t' > 0$ tal que $y = xt'$, o sea, $x(-t)$, o $x = x(-t)t = (xt')t = x(t' + t)$. Es decir que $t' + t (> 0)$ es un periodo de x .

b) Supongamos que x tiene el periodo $t (> 0)$. $x = xt$. Verificamos la condición (2.10). Primero, sea $y \in \gamma^+(x)$, por ejemplo, $y = xt'$ ($t' \geq 0$). Obviamente, cualquier múltiplo nt de t es un periodo de x [$x(2t) = (xt)t = xt = x$, etc., por inducción]. Entonces, $y = xt' = [x(nt)]t' = x(nt + t')$, lo cual implica $y \in \Lambda^+(x)$, pues $nt + t' \rightarrow +\infty$. Resulta

$$\gamma^+(x) \subset \Lambda^+(x).$$

Ahora, sea $y \in \Lambda^+(x)$. Por ejemplo, $t_n \rightarrow +\infty$, $xt_n \rightarrow y$. Podemos encerrar cada t_n en un intervalo $[k_n t, (k_n + 1)t)$, $k_n \in \mathbb{N}$. Ya que $x(k_n t) = x$, tenemos $xt_n = x(k_n t)[t_n - k_n t] = x(t_n - k_n t)$. Aquí la sucesión $t_n - k_n t$ es acotada; por ende posee una subsucesión convergente, la cual sea t'_n , y su límite t' . Entonces tenemos $xt'_n \rightarrow xt'$, y $xt'_n \rightarrow y$, de donde $y = xt'$, o sea, $\Lambda^+(x) \subset \gamma^+(x)$. Ambas inclusiones juntas dan (2.10). \square

2.5. Movimientos periódicos.

Hemos usado ya la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.5.1. Un punto x es periódico si existe un número $T > 0$ tal que $xT = x$. El número T se llama un periodo de x .

PROPOSICIÓN 2.5.2. a) Si T es un periodo de x , vale $x(T+t) = xt$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

b) Si x tiene el periodo T , cualquier punto de la misma órbita de x , $y \in \gamma(x)$, tiene el mismo periodo.

Por eso es legítimo hablar del *periodo de la órbita*, y de *órbita periódica* (o *movimiento periódico*).

Demostración. a) $x(T+t) = (xT)t = xt$. b) Sea $y = xt$; entonces: $yT = (xt)T = x(t+T) = (xT)t = xt = y$. \square

NOTA 1. Los puntos críticos son periódicos, de periodo arbitrario. Llamamos periodo primitivo (también periodo fundamental) de x un número $T > 0$ tal que cualquier periodo de x es un múltiplo de T .

TEOREMA 2.5.3. *Cualquier movimiento periódico que no sea un punto crítico tiene un periodo primitivo.*

Demostración. Sea P el conjunto de todos los periodos de x , (hay que notar que, según nuestra definición todos los periodos son positivos.) Denotamos

$$T =: \inf P.$$

Afirmamos que $T > 0$. En caso contrario, i.e. $T = 0$, existiría una sucesión (t_n) de periodos tal que $t_n \rightarrow 0$. Tenemos $xt_n = x$ ($\forall n$). Probamos que, bajo estas condiciones, x sería un punto crítico. Primero observemos que $x = xt$ implica $x = x(nt)$, para todo n entero. Basta probarlo para $n > 0$, pues si $n < 0$, $x(nt) = x$ implica $x = [x(nt)](-nt) = x(-nt)$, y para $n = 0$ de todos modos es obvio. Siendo la afirmación claramente válida para $n = 1$, procedemos por inducción. Suponiendo que vale hasta $n - 1$, tenemos: $x(nt) = x[(n-1)t + t] = [x(n-1)t]t = xt = x$, la última igualdad debido a la hipótesis. Para probar que x es crítico, es necesario y suficiente probar que para cualquier $t \in \mathbb{R}$, vale $xt = x$. Con este fin construimos una sucesión (t_k) , tal que $t_k \rightarrow t$, y $xt_k = x$ para todo k . Sea (ϵ_k) una sucesión de números positivos que tiende a cero. Entonces elegimos para cada k un periodo $t_k < \epsilon_k$. Entonces el conjunto $\{nt_k \mid n \in \mathbb{Z}\}$ es t_k -denso en \mathbb{R} (i.e., cada punto $t \in \mathbb{R}$ se encuentra a una distancia $< \epsilon_k$ de un punto del conjunto, por ser $nt_k - (n-1)t_k < \epsilon_k$). Elegimos n_k tal que $d(t, n_k t_k) < \frac{\epsilon}{k}$. Poniendo $t'_k := n_k t_k$ tenemos que $t'_k \rightarrow t$, lo cual implica, debido a la continuidad con respecto a valores iniciales, $x_{t'_k} \rightarrow xt$. Pero t'_k son periodos de x así que $xt'_k = x$, o sea x se encuentra arbitrariamente cerca de xt , lo cual implica $xt = x$. Esto prueba que Siendo $T = 0$, x sería crítico contrario a la hipótesis.

Falta solamente probar que T es periodo de x . Pero esto es una consecuencia del hecho de que límites de sucesiones convergentes de periodos son periodos. De hecho, por la definición de T , existen periodos $t_k \rightarrow T$, lo cual implica

$$xT = \lim xt_k = \lim x = x.$$

Así que T es un periodo primitivo de x . Además es único, pues si T y T' fuesen ambos periodos primitivos, cada uno debería ser un múltiplo del otro, lo cual es posible sólo si ambos son iguales. \square

COROLARIO 2.5.4. *Toda órbita periódica coincide con sus dos conjuntos límites.*

Demostración. Esto es una consecuencia del Teorema 2.4.4, allá se observó primero que (2.10) implica $\Lambda^+(x) = \gamma(x)$, y (2.10) es equivalente a la periodicidad de x . Para $\Lambda^-(x)$ vale análogamente. \square

TEOREMA 2.5.5. *Toda órbita periódica es compacta.*

Demostración. Ya que en espacios métricos la compacidad coincide con la compacidad secuencial, hay que probar solamente esta última. Sea $\gamma^+(x)$ una órbita periódica, con periodo positivo T , y sea t_n una sucesión numérica cualquiera. Reducimos los t_n módulo T , lo cual da nuevos números s_n , ubicados todos en el intervalo $[0, T]$. Siendo el intervalo $[0, T]$ compacto, la sucesión (s_n) una subsucesión convergente, decimos (s'_n) . Entonces, por continuidad, la sucesión (xs'_n) también converge, y de hecho converge a un punto de $\gamma^+(x)$, pues si s' es el límite de la sucesión (s'_n) , vale $xs_n \rightarrow xs'$. \square

Agregamos que las órbitas son homeomorfas a circunferencias.

Recordemos primero un teorema bien conocido que dice que

Una aplicación biunívoca y continua de un conjunto compacto es un homeomorfismo. (Es decir que la aplicación inversa es automáticamente continua). Y también este otro:

La imagen de un conjunto compacto bajo una función continua es compacta.

Aplicando estas proposiciones obtenemos que un arco de órbita que no sea un punto crítico, $\{xt \mid t_1 \leq t \leq t_2\}$, si la órbita no es periódica, o su periodo primitivo es mayor que $t_2 - t_1$, es homeomorfo a un intervalo cerrado (pues mapea el intervalo de manera continua y biunívoca [Por ser el intervalo más corto que el periodo] al arco).

Volvemos al resultado enunciado anteriormente: *Las órbitas periódicas son homeomorfas a circunferencias.*

PROPOSICIÓN 2.5.6. *Una órbita periódica, que no sea un punto crítico, es homeomorfa a una circunferencia.*

Demostración. Sea $\gamma(x)$ la órbita y $T(> 0)$ su periodo primitivo. Entonces la función $\pi_x(t)$ es una biyección continua del intervalo $[0, T)$ a $\gamma(x)$. Consideremos una circunferencia C dotada de una coordenada cíclica θ que sea normada de tal manera que a una vuelta por C en un sentido determinado corresponde un aumento de θ por T . Denotamos la función que asigna a cada valor de $\theta \in [0, T)$ un punto de C por $\varphi(\theta)$. Siendo esta función biunívoca, podemos formar su inversa, φ^{-1} , que lleva C al intervalo $I = [0, T)$, y es continua salvo en $\varphi(0)$ (donde asume los límites 0 y T). Por lo tanto, la función compuesta, $\pi_x \circ \varphi^{-1}$, es una biyección de C a $\gamma(x)$, y es continua salvo en el punto $\varphi(0)$. Averiguamos la continuidad en este punto. Consideramos primero una sucesión $t_n(= \theta_n) \rightarrow 0^+$, entonces $\varphi^{-1}(\varphi(\theta_n)) = \theta_n \rightarrow 0$, mientras

$\varphi(\theta_n) \rightarrow \varphi(0)$, y $\pi_x(t_n) \rightarrow x$ lo cual da $\pi_x \circ \varphi^{-1}(p_n) \rightarrow x$. Análogamente,

$t'_n(= \theta'_n) \rightarrow T$ implica $\varphi^{-1}(p'_n) = \theta'_n \rightarrow T$ [$p'_n := \varphi(t'_n)$], $\varphi(\theta'_n) \rightarrow p_0$, $\pi_x(t'_n) \rightarrow x$, de donde $\pi_x(\varphi^{-1}(p'_n)) \rightarrow x$ mientras $p'_n \rightarrow p_0$.

Esto prueba que la función $\pi_x \circ \varphi^{-1}$ toma en p_0 el límite único x , y queda demostrada la continuidad de la misma en toda C . Siendo esta compacta, se concluye que $\pi_x \circ \varphi^{-1}$ es un homeomorfismo de la circunferencia C a la órbita. Ilustramos esta demostración mediante la siguiente Figura 2.3. □

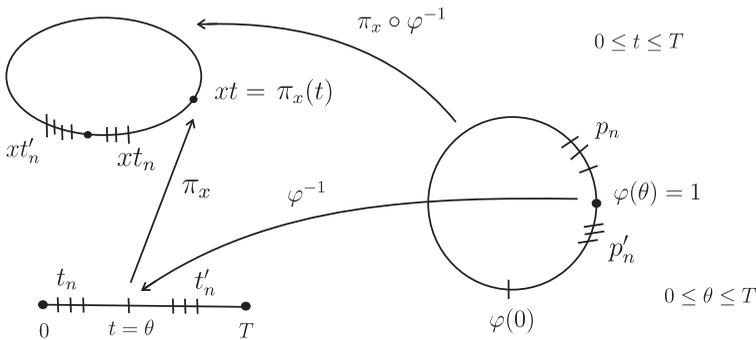


Figura 2.3. Ilustración de la demostración de la Proposición 2.5.6.

2.6. Flujos diferenciables y ecuaciones diferenciales.

Para poder hablar de *sistema dinámico (o flujo) diferenciable*, es necesario que el espacio estado X posea una estructura lineal para poder formar diferencias y por ende cocientes de diferencias que en el

límite dan derivadas. En particular esto es el caso si el espacio X es euclideo.

DEFINICIÓN 2.6.1. El sistema dinámico

$$\pi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$$

es *diferenciable* si todas las funciones π_x ($x \in \mathbb{R}$) (movimientos) son diferenciables para todo $t \in \mathbb{R}$.

De hecho, es suficiente exigir la diferenciabilidad para cada movimiento sólo para el punto inicial, ya que entonces resulta automáticamente diferenciable a lo largo de su dominio que es \mathbb{R} . De hecho, para que π_x sea diferenciable en t , es necesario y suficiente que π_{xt} sea diferenciable para 0, ya que $\pi_{xt}(0) = (xt)0 = xt = \pi_x(t)$. Así que si π_{xt} es diferenciable en 0, π_x lo es en t .

Ahora supongamos dado en X un *campo vectorial* f (que asigna a cada punto $x \in X$ un vector $f(x)$). Exigiendo que en cada punto x la derivada $\frac{d}{dt}\pi_x(0)$ coincide con el vector $f(x)$, se llega a la *ecuación diferencial*

$$\frac{d}{dt}\pi_x(0) = f(x) \quad (x \in X). \quad (2.11)$$

Si se cumple esta identidad, decimos que *el flujo π satisface la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$* .

Escribimos la ecuación (2.12) en la forma equivalente pero más acostumbrada:

$$\frac{d}{dt}\pi_x(t) = f(\pi_x(t)) \quad (t \in \mathbb{R}, x \in X). \quad (2.12)$$

De hecho, para $t = 0$ esta se reduce a la anterior (ya que $\pi_x(0) = x$). Pero también es consecuencia de la misma. En efecto, para x y t dados, podemos reescribir (2.12) como

$$\frac{d}{dt}\pi_{xt}(0) = f(\pi_{xt}(0)) = f(xt) \quad (t \in \mathbb{R}, x \in X). \quad (2.13)$$

La cual es (2.11) con xt en lugar de x . La ecuación (2.12) es la forma más explícita de la ecuación diferencial que se escribe usualmente como

$$\dot{x} = f(x),$$

cual forma debe considerarse sólo como una notación abreviada (ya que, entendida literalmente, no tiene sentido.) Podemos decir que el concepto de sistema dinámico continuo expresa la estructura algebraico-topológica de la totalidad de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferencial para el cual se cumplen los teoremas de existencia para toda la recta \mathbb{R} (o existencia global), unicidad y dependencia continua de las soluciones con respecto a los valores iniciales. Sabemos que todas estas propiedades salvo la existencia

global, se satisfacen si el sistema cumple una condición de Lipschitz en una vecindad de cada punto, lo cual garantiza la continuabilidad de las soluciones hasta la frontera de cierta vecindad cerrada, acotada del punto inicial, o si al contrario queda dentro de esta vecindad, entonces la solución es continuable por todo el intervalo infinito $[0, +\infty)$ { y análogamente, por todo el intervalo $(-\infty, 0]$, cuando se trata de la continuación hacia atrás }.

Con respecto a la existencia global, puede ocurrir que una solución *se escapa al infinito en un tiempo finito*, es decir que existe un número $t^* > 0$ tal que las normas de los puntos alcanzados por la solución en el tiempo t tienden a infinito cuando $t \rightarrow t^*$. Este fenómeno lo llamamos simplemente *escape en tiempo finito*. Se sabe de la teoría de ecuaciones diferenciales lineales que estas siempre permiten una continuación de las soluciones por toda la recta. Por otra parte, ya entre las ecuaciones no lineales más sencillas se encuentran casos con escape en tiempo finito. Esto sucede por ejemplo con la ecuación

$$\dot{x} = x^2.$$

La integración da la solución $x(t)$ con punto inicial $x_0 \neq 0$ ³ en la forma:

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t}$$

la cual está definida sólo en el intervalo $t < \frac{1}{x_0}$ suponiendo $x_0 > 0$. (También existe para $t > \frac{1}{x_0}$, pero nos interesa solamente el intervalo que contiene 0.) Para $t \rightarrow \frac{1}{x_0}$, $x(t)$ tiende a infinito en valor absoluto.

Sistemas que son como sistemas dinámicos salvo que sus movimientos están definidos solamente en intervalos que no abarcan necesariamente todo \mathbb{R} , se llaman *sistemas dinámicos locales (o también flujos locales* Véase [BO]. [Es claro que en este caso el axioma II] vale únicamente para los valores de t_1 y t_2 para los cuales los respectivos movimientos están definidos.] Las ecuaciones diferenciales con escape en tiempo finito pueden concebirse como sistemas dinámicos locales. De hecho, para dibujar *el retrato fase* de una ecuación, no importa si las soluciones que se alejan al infinito están definidas o no para toda la recta, ya que las curvas orientadas que representan las soluciones (órbitas) no reflejan esta diferencia; del parámetro t sólo influye en las órbitas el sentido en el cual este crece. Sin embargo, ecuaciones que pretenden representar sistemas reales, no deben presentar este fenómeno, por cual razón es útil tener a la mano criterios que lo excluyen, como el siguiente (de Whitney y Wintner ⁴)

³ $x_0 = 0$ corresponde a la solución trivial que siempre existe en toda la recta.

⁴Para referencias completas, consulte [N-S] pp.9.

TEOREMA 2.6.2. *Dada la ecuación diferencial (vectorial)*

$$\dot{x} = f(x), \quad (x \in \mathbb{R}^n, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n),$$

con f continua en todo \mathbb{R}^n , sus soluciones están definidas en toda la recta \mathbb{R} si la condición

$$\|f(x)\| = o(\|x\|) \tag{2.14}$$

vale para $\|x\| \rightarrow +\infty$: [Aquí estamos usando la norma $\|x\| = |x_1| + \dots + |x_n|$, $x = (x_1, \dots, x_n)$.]

Demostración. Una demostración se encuentra en [N-S]. □

La condición (2.14) dice esencialmente que la función f no crece más que en el caso de un sistema lineal, aunque f no tiene que ser lineal. En particular, el teorema no cubre el caso (más importante) donde el segundo miembro de la ecuación es un polinomio (como en el ejemplo dado). En estos casos la cuestión de escape en tiempo finito tiene que ser decidida individualmente. Daremos unos ejemplos para ilustrar como se puede hacer esto en un caso concreto.

EJEMPLO 2.6.3. Consideremos el sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + xy, \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned} \tag{2.15}$$

La segunda ecuación, que es independiente de la primera (*sistema en forma triangular*), tiene el origen asintóticamente estable (todas las órbitas tienden a él para $t \rightarrow +\infty$). Por eso, si una variable se escapa, tiene que ser x . Para ver que esto no es el caso, probamos primero el siguiente resultado (que puede servir para muchos casos parecidos).

PROPOSICIÓN 2.6.4. [Principio de comparación.] *Dadas dos ecuaciones diferenciales, de las cuales una puede ser no autónoma*⁵,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t), \quad (x, f \in \mathbb{R}), \\ \dot{u} &= \varphi(u), \quad (\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+), \end{aligned} \tag{2.16}$$

y dos puntos iniciales respectivos, x_0 y u_0 que satisfagan las desigualdades siguientes:

- a) $|f(x, t)| < \varphi(|x|)$, ($\forall x \neq 0, t$);
- b) $|x_0| < |u_0|$.

Sean $x(t)$ y $u(t)$ las soluciones respectivas. Entonces vale:

$$|x(t)| < u(t), \quad (\forall t \geq 0). \tag{2.17}$$

⁵Es conveniente suponer que la "ecuación de comparación sea autónoma.

Demostración. Supongamos que existe un valor $t > 0$ tal que $|x(t)| > u(t)$. Debido a la condición b), existe un valor $\tau \in (0, t)$ tal que

$$|x(\tau)| = u(\tau). \tag{2.18}$$

(por ser las funciones x y u continuas). Introducimos la función $y(t) = |x(t)| - u(t)$. Entonces (2.18) da $y(\tau) = 0$. Podemos suponer que τ sea el valor maximal de t dentro del intervalo $(0, t)$ que satisface (2.18). [Pues si σ es el supremo de estos valores de t que satisfacen (2.18), con $\tau = \sigma_n$. Entonces $y(\sigma_n) \rightarrow y(\sigma)$, y ya que $y(\sigma_n) = 0$, también $y(\sigma) = 0$.] Así tenemos:

$$y(\tau) = 0, \quad y(t') > 0 \quad (\forall t' \in (\tau, t]). \tag{2.19}$$

Por otra parte tenemos:

$$\dot{y}(\tau) = \widehat{|x(\tau)|} - \dot{u}(\tau)$$

donde

$$\widehat{|x(\tau)|} = \begin{cases} f(x(\tau), \tau) & \text{si } x(\tau) \geq 0, \\ -f(x(\tau), \tau) & \text{si } x(\tau) \leq 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

y

$$\dot{u}(\tau) = \varphi(u(\tau)).$$

Independiente del signo de $x(\tau)$, primero da $\dot{y}(\tau) < 0$. Pero, siendo

$$\dot{y}(\tau) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(\tau + h) - y(\tau)}{h},$$

y $y(\tau + h) > y(\tau)$ para $h > 0$, pequeño, este límite no puede ser negativo, lo cual es una contradicción. (Ver la Figura 2.4.) \square

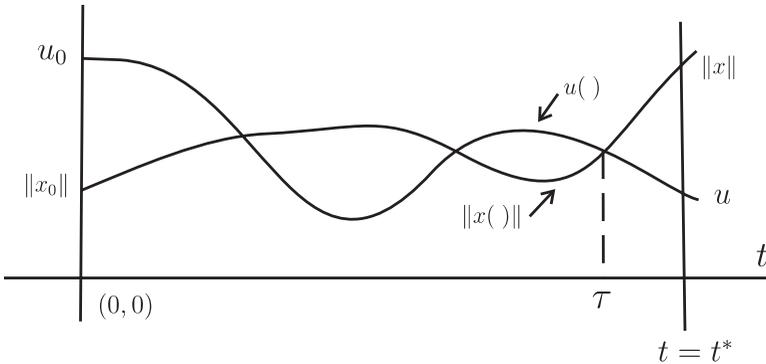


Figura 2.4. Ilustración de la demostración de la Proposición 2.5.6.

COROLARIO 2.6.5. Si las soluciones de la ecuación $\dot{u} = \varphi(u)$ son acotadas, las de $\dot{x} = f(x, t)$ también son acotadas.

(Pues si $x(t)$) es una solución de la segunda ecuación, con $x(0) = x_0$, es *mayorizada* por la ecuación $u(t)$ de la primera si se toma $u(0) > |x_0|$.)

COROLARIO 2.6.6. *Si la ecuación $\dot{u} = \varphi(u)$ no tiene escape en tiempo finito, $\dot{x} = f(x, t)$ tampoco lo tiene.*

La demostración es trivial, dar los detalles como ejercicio.

EJEMPLO 2.6.7. Probar que $\dot{x} = -\frac{1}{1+x^2}$ tiene todas las soluciones acotadas. De hecho, poniendo $\varphi \equiv 0$, tenemos $f(x) = -\frac{1}{1+x^2} < \varphi(x)$ para toda x ; ya que las soluciones de $\dot{u} = 0$ son acotadas, lo mismo vale para la ecuación dada.

OBSERVACIÓN 1. Para probar la acotación de las soluciones (o la ausencia de escape en tiempo finito), basta usar una ecuación de comparación, $\dot{u} = \varphi(u)$, para la cual la condición primero vale para valores de x absolutamente grandes, i.e., que exista $B > 0$ tal que primero se cumple para $|x| \geq B$ y que las soluciones $u(t)$ sean *uniformemente acotadas*, en el sentido que, para cada conjunto U acotado, las órbitas con puntos iniciales en U tengan una cota común. De hecho, si en este caso las soluciones de $\dot{u} = \varphi(u)$ con puntos iniciales en $|u| \leq A$ tienen la cota común $M(A)$, y $x(t)$ es una solución con punto inicial x_0 , elegimos una órbita de comparación $u(t)$ con $u_0 = A > |x_0|$, entonces $|x(t)|$, mientras $x(t)$ permanece en $|x| \geq B$, no puede salir de $|x| \leq M(A)$. Si entra en $|x| < B$, y sale después, para alcanzar en un momento t_1 un punto x_1 tal que $B < |x_1| < u_0$, se toma (x_1, t_1) como una nueva condición inicial, y otra vez la órbita no puede salir de $|x| \leq M(A)$ antes de regresar de nuevo a $|x| < B$. Repitiendo este argumento, se llega a la conclusión de que la órbita nunca sale de $|x| \leq M(A)$, en otras palabras, tiene la cota $M(A)$.

EJEMPLO 2.6.8. Consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = x - x^3.$$

Observamos que $\dot{x} \leq 0$ para $x \geq 1$ y $\dot{x} \geq 0$ para $x \leq -1$. Ambas desigualdades se pueden reunir en una: $\widehat{|x|} \leq 0$ para $|x| \geq 1$. Tomamos como ecuación de comparación $\dot{u} = 0$ y vale primero en la forma $|x - x^3| < 0$ para $|x| > 1$, por ejemplo $|x| \geq 2$. Debido a la observación, las órbitas son acotadas.

Nueva formulación del principio de comparación.

PROPOSICIÓN 2.6.9. *Dadas las dos ecuaciones diferenciales donde f y φ son continuas.*

$$\dot{x} = f(x), \quad (x, f \in \mathbb{R}^n), \quad (2.21)$$

$$\dot{u} = \varphi(u), \quad (\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}). \quad (2.22)$$

Introducimos en \mathbb{R}^n la norma siguiente

$$\|x\| = \max\{|x_k| : k = 1, \dots, n\}.$$

Supongamos que se satisfacen las desigualdades siguientes:

- 1.) $\|f(x)\| < \varphi(\|x\|)$ ($x \neq \mathbf{0}, t \geq 0$),
- 2.) $\|x_0\| < u_0$ ($x_0 \in \mathbb{R}^n, u_0 > 0$).

Sean $x(\cdot)$ y $u(\cdot)$ soluciones de (2.21) y (2.22) respectivamente, que satisfacen las condiciones iniciales correspondientes:

$$x(0) = x_0, \quad u(0) = u_0.$$

Entonces vale, para todo $t \geq 0$, la desigualdad

$$\|x(t)\| \leq u(t). \quad (2.23)$$

OBSERVACIÓN 2. Valen las siguientes equivalencias: 1.) equivale a

$$|f_i(x)| < \varphi(\|x\|), \quad (i = 1, \dots, n; \quad x \neq \mathbf{0}); \quad (2.24)$$

(2.23) equivale a

$$|x_i(t)| \leq u(t) \quad (i = 1, \dots, n; \quad t \geq 0). \quad (2.25)$$

(Por la forma de la norma).

Demostración. Supongamos que existe un $t^* > 0$ tal que $\|x(t^*)\| > u(t^*)$. Siendo $\|x(t^*)\|$ el máximo de los números $|x_i(t^*)|$, existe un i tal que $|x_i(t^*)| > u(t^*)$. Si denotamos $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$, 2.) da $|x^i| < u_0$, o sea, $|x_i(0)| < u(0)$. Denotando $\gamma(\cdot) = |x_i(\cdot)| - u(\cdot)$, tenemos $\gamma(0) < 0$, $\gamma(t) > 0$. Aquí $\gamma(\cdot)$ es obviamente continua, lo cual implica la existencia de un valor $\tau \in (0, t^*)$ tal que $\gamma(\tau) = 0$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad, que τ sea el último valor menor que t^* para el cual vale esto. [Pues si existen varios puntos con esta propiedad (posiblemente una infinidad), su sup tiene la misma por continuidad de $\gamma(\cdot)$, y este lo denotamos por τ . (Obviamente $\tau < \tau^*$, ver la Figura 2.5)].

Así que tenemos:

$$\gamma(\tau) = 0, \quad \gamma(t) > 0 \quad (\forall t \in (\tau, t^*]). \quad (2.26)$$

Formamos la derivada de $\gamma(\cdot)$ en τ :

$$\dot{\gamma} = \frac{d}{dt}[|x_i(t)|]_{t=\tau} - \dot{u}(\tau).$$

El segundo término es $-\varphi(u(\tau))$, mientras el primero es igual a $\dot{x}_i(\tau) \operatorname{sgn} x_i(\tau) = \operatorname{sgn} x_i(\tau) f(x(\tau), \tau)$. Esto da:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(\tau) &= \pm f(x_i(\tau), \tau) - \varphi(u(\tau)) \\ &\leq \|f(x_i(\tau), \tau)\| - \varphi(\|x(\tau)\|) \end{aligned}$$

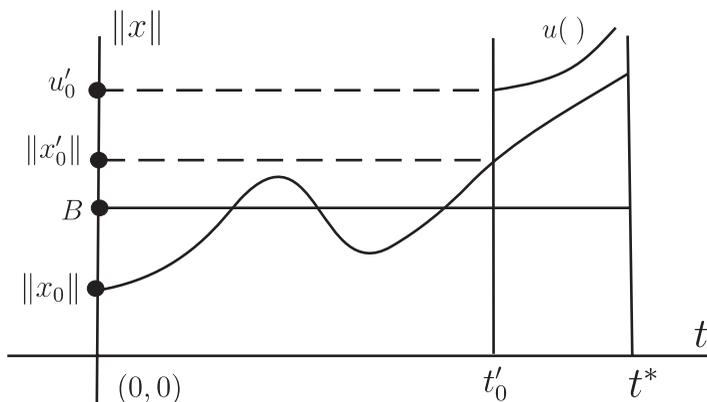


Figura 2.5. Ilustración de la demostración de la Proposición 2.6.9.

(porque $\|x(\tau)\| = u(\tau)$), y esta última diferencia es negativa debido a (2.24). Así obtenemos

$$\dot{y}(\tau) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(\tau + h) - y(\tau)}{h} < 0,$$

lo cual implicaría $y(\tau + h) < y(\tau)$ para h pequeño, y esto contradice (2.26) ya que $h > 0$. \square

COROLARIO 2.6.10. Si las soluciones de la ecuación $\dot{u} = \varphi(u)$ son acotadas, las de $\dot{x} = f(x)$ también lo son, siempre que se cumplan las hipótesis de la Proposición 2.6.4.

Pues si $x(t)$ es una solución de la segunda ecuación, con $x(0) = x_0$, entonces esta es *dominada* por la solución $u(t)$ de la primera (en el sentido de la desigualdad (2.23)) si se toma para u una condición inicial $u(0) > \|x_0\|$.

COROLARIO 2.6.11. Si la ecuación (2.22) no tiene escape en tiempo finito, (2.21) tampoco lo tiene (bajo las hipótesis de la proposición 2.6.9).

Esto es una consecuencia trivial.

Ejercicio: Dar los detalles.

EJEMPLO 2.6.12. Probar que todas las soluciones de la ecuación

$$\dot{x} = -\frac{1}{1+x^2},$$

son acotadas.

Solución. Podemos usar como solución de comparación $\dot{u} = 0$, ya que $-\frac{1}{1+x^2} < 0$ para todo x . Siendo las soluciones de $\dot{u} = 0$ acotadas (constantes), las de la función dada lo son también por la proposición.

OBSERVACIÓN 3. [Importante]. Para probar que la ecuación (2.21) no tiene escape en tiempo finito, basta exigir que la ecuación de comparación (2.22) tenga esta propiedad, y que la hipótesis 1.) valga para valores x con $\|x\| \geq B$, para alguna constante $B > 0$.

Demostración. Supongamos que alguna solución $x(\cdot)$ de (2.21), con punto inicial x_0 , tiende a infinito cuando $t \rightarrow t_*$ ($t_* > 0$)⁶:

$$\lim_{t \rightarrow t_*^-} \|x(t)\| = \infty.$$

Por continuidad de $\|x(\cdot)\|$, existe obviamente un valor $t'_0 \in [0, t_*)$ tal que $\|x(t)\| \geq B$ para todo $t \in [t'_0, t_*)$. Elegimos un nuevo punto inicial $(t'_0, x(t'_0))$ [lo cual en efecto da $x'(0) = x(t'_0) =: x_0$]. Elegimos después un valor inicial $u' > \|x'_0\|$ para (2.22) y denotamos por $u'(\cdot)$ la solución con la condición inicial $u'(t'_0) = u_0$. Ahora podemos aplicar la desigualdad 1.) a todos los valores $t \in [t'_0, t_*)$, ya que $\|x(t)\| \geq B$ en este intervalo. Siendo u' definida para todo $t > t'_0$, vale la desigualdad (2.23), en todo el intervalo $[t'_0, t_*)$, ya que u' es acotada en este intervalo, $x(\cdot)$ lo es también en contradicción a (2.25). \square

Revisión de ejemplo 2.6.12

Siendo $\dot{x} < 0$ para todo x , es decir $\|f\| \leq 0$ (f de la proposición 2.6.9), podemos usar como ecuación de comparación a cualquier ecuación $\dot{u} = \epsilon$ ($\epsilon > 0$). Si alguna solución de la ecuación ($\dot{x} = -\frac{1}{1+x^2}$) no fuese acotada, para cualquier M existiría un $t_1 > 0$ ⁷ tal $\|x(t_1)\| > M$. Ahora elegimos $\epsilon = \frac{M}{t_1}$, entonces resulta $u(t_1) = \frac{M}{t_1} t_1 = M$, y (2.23) daría $\|x(t_1)\| \leq M$, lo cual es una contradicción.

OBSERVACIÓN 4. Para ser exacto, habría que asegurar que las soluciones de la ecuación existen en toda la recta \mathbb{R}^+ . La existencia local está garantizada por la continuidad de $f(= -\frac{1}{1+x^2})$, y la global por el corolario 2.6.11.

COROLARIO 2.6.13. [= Teorema 2.6.2] La ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ no tiene escape en tiempo finito si

$$f(x) = O(\|x\|)$$

para $\|x\|$ grande (suponiendo que la existencia local esté garantizada).

Demostración. La hipótesis significa la existencia de dos constantes $B > 0$ y $M > 0$ tales que $\|f(x)\| \leq M\|x\|$ para $\|x\| \geq B$. Se puede usar la ecuación de comparación $\dot{u} = N$. u ($N > M$) para $\|x\| \geq B$ y aplicar el corolario 2 junto con la observación 3. \square

⁶Suponiendo $x(t)$ existente para $t \in [0, t_*)$.

⁷Probamos la acotación en sentido $t > 0$.

EJEMPLO 2.6.14. Consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = x \sin x.$$

la aplicabilidad del corolario 2.6.13 es evidente.

Aplicación al ejemplo 2.6.3:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + xy, \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}\tag{2.27}$$

Fijando una solución particular, con valores iniciales x_0, y_0 , que sea $x(t), y(t)$, observemos primero que $y(t) \leq y_0$ para $t \geq 0$. En consecuencia, tenemos, poniendo $f(x) = -x + xy$

$$|f(x)| \leq |x| |y_0 - 1|.$$

Usando la ecuación de comparación $\dot{u} = cu, C = |y_0 - 1|$ y el corolario 2.6.11, se ve que no hay escape en tiempo finito. Ver Figura 2.6

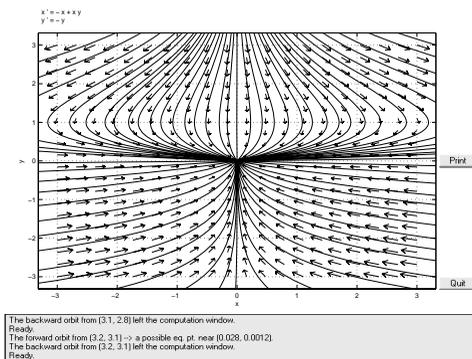


Figura 2.6. Ilustración de la aplicación al Ejemplo ??.

EJEMPLO 2.6.15. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^3, \\ \dot{y} &= x + y.\end{aligned}\tag{2.28}$$

Resolvemos primero la primera ecuación:

$$t = - \int_{x_0}^x x^{-3} dx = \frac{1}{2} x^{-2} \Big|_{x_0}^x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2} \right),$$

$$x(t) = \left(\frac{1}{x_0^2} + 2t \right)^{-1/2};$$

esta está definida para todo $t \geq 0$, y tiende a 0 cuando $t \rightarrow +\infty$. Por eso $x(t)$ es acotada, decimos $|x(t)| \leq M$ ($t \geq 0$) Esto da para la segunda ecuación la estimación

$$|\dot{y}| = |x + y| \leq |x| + M.$$

Usando la ecuación de comparación $\dot{u} = u + M$, se ve que esta no tiene escape en tiempo finito (la sustitución $v = u + M$ da $\dot{v} = \dot{u} = u + M = v$, $v = v_0 e^t$, $u = v - M = v_0 e^t - M = (u_0 + M)e^t - M$.) Ahora el corolario 2.6.11 da la misma propiedad para la segunda ecuación, y desde luego para el sistema.

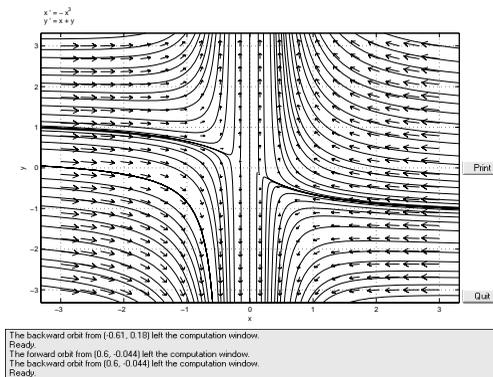


Figura 2.7. Ilustración del Ejemplo 2.6.15.

Ejercicios Determine cuales de las siguientes ecuaciones y sistemas tienen escape finito y cuales no:

- (1) $\dot{x} = x^2$ para $x_0 < 0$, $t > 0$.
- (2) $\dot{x} = -x^2$ para
 - (a) $x_0 < 0$, $t > 0$,
 - (b) $x_0 > 0$, $t > 0$.
- (3) $\dot{x} = -x^5$,
 $\dot{y} = xy + x^2$.
- (4) $\dot{x} = y$,
 $\dot{y} = -x$,
 $\dot{z} = xyz$.

Teoría de Estabilidad

3.1. Estabilidad, prolongación y función de Lyapunov

Presentamos la teoría en el contexto de un sistema dinámico en un espacio métrico X , porque es en éste donde ella donde ella adquiere su máxima elegancia. Para los ejemplos y las aplicaciones suponemos que X sea el espacio Euclideo, \mathbb{R}^n . Usamos las mismas notaciones del capítulo precedente.

En el primer caso supongamos que esté dado un sistema dinámico (X, \mathbb{R}, π) que tenga un punto crítico (o de equilibrio) que denotamos por $\mathbf{0}$ o posiblemente un conjunto compacto invariante M . [Se puede pensar por ejemplo, en una órbita periódica o en un toro invariante.] Denotaremos los puntos de X por p y por q para no confundirlos con las variables. Cuando hablamos de una ecuación diferencial, suponemos que esta sea de la forma

$$\dot{x} = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n), \quad (3.1)$$

con el origen como punto crítico, o sea, $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, y que satisfaga en una vecindad de $\mathbf{0}$ a una condición de Lipschitz, para representar un sistema dinámico, por lo menos localmente, siendo el concepto de *estabilidad de Lyapunov* estrictamente local.

Si $p \in X$ y $A \subset X$, denotamos a las vecindades esféricas de radio r de estos por $B_r(p)$ y $B_r(A)$; y las esferas de radio r de estos $S_r(p)$ y $S_r(A)$ respectivamente:

$$\begin{aligned} B_r(p) &:= \{q \in X \mid d(p, q) < r\}, & (r > 0, p \in X); \\ S_r(p) &:= \{q \in X \mid d(p, q) = r\}, \\ B_r(A) &:= \{q \in X \mid d(p, A) < r\}, & (A \subset X); \text{ y} \\ S_r(A) &:= \{q \in X \mid d(p, A) = r\}. \end{aligned}$$

donde $d(p, A) := \inf\{d(p, q) \mid q \in A\}$. Si $p = \mathbf{0}$, escribimos simplemente B_r y S_r para la vecindad y la esfera de estos, respectivamente.

DEFINICIÓN 3.1.1. El punto de equilibrio $\mathbf{0}$ es *estable (en el sentido de Lyapunov)* si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall p \in B_\delta(\mathbf{0})) \Rightarrow \gamma^+(p) \subset B_\epsilon(\mathbf{0}). \quad (3.2)$$

Usando el lenguaje descriptivo cualitativo se puede decirlo así: *Un movimiento que empieza cerca del origen, permanece para siempre cerca de él.* [Se entiende que para $t > 0$.]

Esta definición puede aplicarse igualmente a un conjunto compacto invariante M , hablando de la *estabilidad del conjunto M* si se escribe en lugar de $B_\delta(\mathbf{0})$ y $B_\epsilon(\mathbf{0})$, $B_\delta(M)$ y $B_\epsilon(M)$ respectivamente.

La *estabilidad en el sentido negativo*, o simplemente *estabilidad negativa*, se define reemplazando en la definición $\gamma^+(p)$ por $\gamma^-(p)$.

Cabe mencionar que la definición de estabilidad se asemeja formalmente a la dependencia continua con respecto a la condición inicial, con la diferencia que en el caso de esta la inclusión vale para arcos finitos de órbitas como $p[0, T]$ entonces solamente, y no para toda la semiórbita, como aquí. En este sentido, *la estabilidad es la dependencia continua con respecto a valores iniciales uniformemente con respecto al largo del intervalo.* Cuando el equilibrio $\mathbf{0}$, o el conjunto invariante M no satisface la condición de estabilidad, se llama *inestable*.

En un lenguaje más convencional, se habla de la *estabilidad (inestabilidad) de la solución cero (y no del punto crítico)*.

EJEMPLO 3.1.2. En el caso de una ecuación escalar de primer orden, $\dot{x} = f(x)$, la estabilidad se determina por el término lineal, si este no es cero. De hecho sea

$$\dot{x} = f(x) = ax + g(x), \quad a \neq 0,$$

donde g empieza con términos de grado 2. Supongamos f de clase C^2 . Entonces se puede factorizar f :

$$\dot{x} = x(a + xO(1))$$

con $O(1)$ acotado para $|x|$ pequeño. Para determinar la estabilidad o inestabilidad, indagamos los signos de \dot{x} para $x > 0$ y $x < 0$, absolutamente pequeños. Observamos la siguiente

Regla: Si en un sistema unidimensional, existe una vecindad $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < \epsilon\}$ de origen en la cual $x\dot{x}$ tiene signo fijo, entonces:

- (i) $x = 0$ es *estable* si $x\dot{x} \leq 0$,
- (ii) $x = 0$ es *inestable* si $x\dot{x} > 0$. Además,
- (iii) Si $x\dot{x}$ tiene un signo fijo para $x < 0$, y el opuesto (también fijo) para $x > 0$, $x = 0$ es inestable.

Los primeros dos casos se pueden verificar mediante los siguientes diagramas: (Ver la Figura 3.1.)

En el tercer caso se cumple la condición (i) por un lado, y (ii) por el otro, así que las soluciones se acercan por un lado y se alejan por el otro, lo cual significa inestabilidad. (Para que haya estabilidad no deben alejarse hacia ningún lado.) [Ejemplos para los tres casos: (i) $\dot{x} = -x$; (ii) $\dot{x} = x$; (iii) $\dot{x} = x^2$; caso límite de (i): $\dot{x} = 0$.]

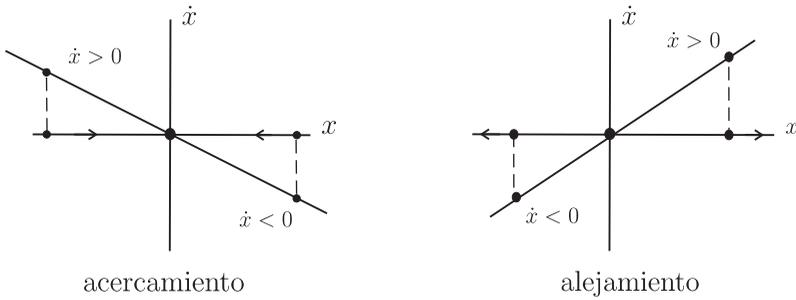


Figura 3.1. Ilustración del Ejemplo 3.1.2

Ahora aplicamos esto al ejemplo en cuestión. Ya que $a \neq 0$, existe obviamente una vecindad de 0 en la cual $x\dot{x}$ tiene el signo de a ; si $a < 0$, el origen es estable, si $a > 0$, inestable.

EJEMPLO 3.1.3. Consideremos el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax,$$

donde A es una matriz constante cuyos autovalores, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, sean todos distintos, reales y menores o iguales a cero. Sean v_1, \dots, v_n los autovalores correspondientes. Entonces la solución general es de la forma

$$x(t) = \sum_{k=1}^n c_k v_k e^{\lambda_k t},$$

donde c_k son constantes. Siendo los $\lambda_k \leq 0$, cuando crece t , el factor exponencial disminuye (o queda constante si $\lambda_k = 0$), mientras los $c_k v_k$ son vectores fijos. Obviamente, $x(t)$ no se aleja del origen cuando t crece, lo cual implica estabilidad.

EJEMPLO 3.1.4. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3, \\ \dot{y} &= -x - y. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Siendo el sistema no lineal, usamos un método geométrico para bosquejar el *retrato fase* y sacar de este una conclusión sobre la estabilidad. Observamos primero que el eje y es invariante, ya que, $x = 0$ implica $\dot{x} = 0$, es decir que el sistema tiene un conjunto invariante $x = 0$. A lo largo de la recta vale $\dot{y} = -y$ (a saber $x = 0$); las soluciones tienden hacia el origen. Todas las demás órbitas tienden hacia la recta invariante $x = 0$ y la diagonal $x + y = 0$ es cortada horizontalmente en direcciones indicadas en la Figura 3.2. Debido a la simetría del sistema, basta con analizar un semiplano, por ejemplo el derecho ($x > 0$) que

es invariante. Este se divide en tres sectores, separados entre sí por el eje x y la diagonal ($x + y = 0$). En los dos sectores más alto y más bajo, ambas coordenadas disminuyen en valor absoluto, mientras, tomando un punto inicial en el sector intermedio, la órbita va hacia la izquierda abajo, y por eso tiene que cruzar la diagonal para entrar al de abajo, del cual ya no sale (es positivamente invariante). Por ende todas las órbitas tienden hacia el origen y este resulta estable. (Ver la Figura 3.2).

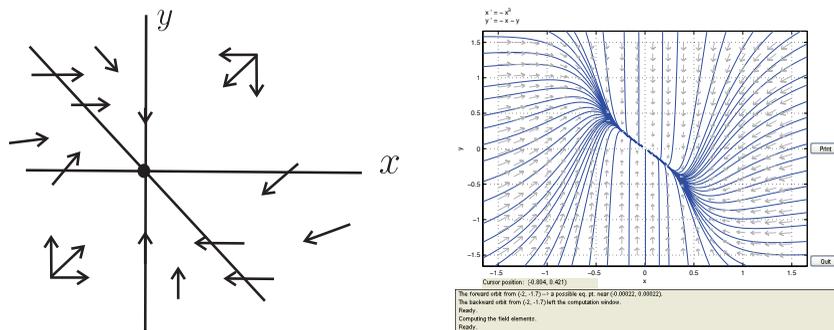


Figura 3.2. Ilustración del Ejemplo 3.1.4

Ejercicios.

- (1) Extender el razonamiento del ejemplo 3.1.2 al caso de ecuaciones cuyo segundo miembro empieza con un término ax^p , ($p \in \mathbb{N}$) (más términos de orden superior, ¿cómo tienen que ser a y p para que haya estabilidad?).
- (2) Probar que el origen del sistema plano siguiente es estable,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + y^2, \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned} \quad (3.4)$$

es estable usando el mismo método (signos de \dot{x} , \dot{y}) como en el ejemplo 3.1.4.

3.1.1. Función de Lyapunov. Se trata de definir una función escalar, no negativa,

$$V : X \rightarrow \mathbb{R}$$

que permite determinar si el origen es estable¹.

¹Originalmente, en su obra *Teoría General de la estabilidad del movimiento*(1892), Lyapunov consideraba ecuaciones no autónomas, y por eso consideró funciones de $X \times \mathbb{R}$ en \mathbb{R}^+ . La Teoría adquiere su forma más transparente en el caso de un sistema autónomo y de una función de x solamente.

DEFINICIÓN 3.1.5. Una *función de Lyapunov* para un sistema dinámico, (X, \mathbb{R}, π) con respecto a un punto crítico $\mathbf{0}$ del mismo, es una función V de X en \mathbb{R} , con las propiedades siguientes:

- i) $p_n \rightarrow \mathbf{0}$ implica $V(p_n) \rightarrow 0$. [En particular, esto implica $V(\mathbf{0}) = 0$]
- ii) Si para alguna sucesión (p_n) , $V(p_n) \rightarrow 0$, entonces $p_n \rightarrow \mathbf{0}$.
- iii) V es *no creciente con respecto a los movimientos*, lo cual quiere decir

$$q \in \gamma^+(p) \text{ implica } V(q) \leq V(p).$$

TEOREMA 3.1.6. [Condición suficiente para estabilidad] Si para un punto $\mathbf{0}$ existe una función de Lyapunov, $\mathbf{0}$ es estable.

Demostración: Supongamos que $\mathbf{0}$ sea inestable. Entonces, invirtiendo la definición 3.1.1, tenemos:

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists p \in B_\delta(\mathbf{0})) \gamma^+(p) \not\subset B_\epsilon(\mathbf{0})$$

Consideramos una sucesión (δ_n) tal que $\delta_n \rightarrow 0$, y una sucesión de puntos $p_n \in B_{\delta_n}(\mathbf{0})$, así que $p_n \rightarrow \mathbf{0}$, tales que $\gamma^+(p_n) \not\subset B_\epsilon(\mathbf{0})$. Elegimos puntos $q_n \in \gamma^+(p_n)$ tales que $q_n \notin B_\epsilon(\mathbf{0})$. Ahora tenemos, por (i),

$$V(p_n) \rightarrow 0,$$

por (ii),

$$V(q_n) \not\rightarrow 0$$

(ya que $q_n \not\rightarrow \mathbf{0}$). Ambas relaciones juntas dan la existencia de valores n tales que

$$V(q_n) \geq V(p_n),$$

pero esto contradice a (iii), por ser $q_n \in \gamma^+(p_n)$. □

NOTA 2. Para garantizar la estabilidad no es necesario que la función V esté definida en todo el espacio X . De hecho es suficiente que esté definida sólo en una vecindad de $\mathbf{0}$. Por otra parte, las funciones que se usan están normalmente definidas en todo el espacio, y en este caso la formulación de la teoría es más cómoda suponiendo la existencia de V en todo el espacio.

EJERCICIO 3.1. Adaptar la demostración del Teorema 3.1.6 al caso donde la función V está definida solamente en una vecindad U de $\mathbf{0}$

Para el uso de la función de Lyapunov lo importante es poder verificar en casos concretos la condición de monotonía, (iii), que es la única de las tres de carácter *dinámico*, involucrando la dinámica π en la forma de las semiórbitas mientras que las otras dos son puramente *geométricas*. Si se conocen las órbitas la condición (iii) se verifica directamente, pero la idea es la de determinar la estabilidad *sin conocer*

las órbitas, o sea, sin necesidad de integrar el sistema. Esto se logra usando la derivada total (o la derivada de Lie) a lo largo del movimiento.

Dada la ecuación diferencial (vectorial)

$$\dot{x} = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n), \quad (3.5)$$

definimos la *derivada total o de Lie* de V correspondiente en el punto, x , como

$$\dot{V} = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle, \quad (3.6)$$

donde ∇V denota el gradiente de V y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar.

Aplicamos el siguiente resultado conocido: *Si V es una función de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} , de clase C^1 , y $\pi(t)$ es una función de \mathbb{R} en \mathbb{R}^n , también de clase C^1 , entonces una condición necesaria y suficiente para que V sea no creciente a lo largo de la curva dada por π (en el sentido de que $t_1 < t_2$ implica $V(t_2) \leq V(t_1)$) es que la derivada total de V , satisfaga*

$$\dot{V} = \langle \nabla V(\pi(t)), \dot{\pi}(t) \rangle \leq 0 \quad (\forall t \in \mathbb{R}).$$

En el caso de que π sea una solución de (3.5) tenemos $\dot{\pi} = f$ y el Teorema 3.1.6 adquiere para el sistema dinámico definido por la ecuación diferencial (3.5) la forma siguiente [suponiendo $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$].

TEOREMA 3.1.7. *La solución de equilibrio $\mathbf{0}$ de la ecuación (3.5) es estable si existe una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ de clase C^1 que satisfice las condiciones siguientes:*

- i) $V(\mathbf{0}) = 0$;
- ii) $V(x) > 0$, para todo $x \neq \mathbf{0}$;
- iii) $\dot{V}(x) \leq 0$, para todo x .

EJEMPLO 3.1.8. Consideremos la ecuación diferencial unidimensional

$$\dot{x} = ax^{2p+1} + g(x), \quad a < 0, \quad p \in \mathbb{N}, \quad g(x) = O(x^{2(p+1)}).$$

Usamos como función de Lyapunov la función

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

La derivada total es, según (3.6),

$$\dot{V}(x) = x\dot{x} = ax^{2(p+2)} + xg(x).$$

Debido a la condición sobre los términos de g , existe un $\epsilon > 0$ y una cota M tales que

$$|g(x)| \leq M|x|^{2(p+2)}, \quad \text{para } |x| \leq \epsilon.$$

La función V satisfice obviamente las condiciones (i), (ii), y es continua. Si podemos verificar la vigencia de la condición (iii), queda demostrada la estabilidad del origen.

De hecho, siendo $a < 0$, tenemos, para $|x| < \epsilon$,

$$\dot{V}(x) \leq ax^{2(p+2)}[1 + |x|].$$

Siendo $|x| < \epsilon$, tenemos $1 + |x| > 0$, lo cual da

$$\dot{V}(x) \leq 0, \text{ para } |x| < \epsilon.$$

Se cumple la condición (iii) en una vecindad de $(0, 0)$, lo cual, junto con la Nota 2 (y el Ejercicio 3.1) da la estabilidad.

EJEMPLO 3.1.9. Dado el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + ax, \\ \dot{y} &= -x + by + cy^2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dar condiciones suficientes relativo a los coeficientes a , b , c para que el equilibrio $(0, 0)$ sea estable.

Solución. Ponemos $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$; esta función es continua y satisface las condiciones (i), (ii). Formamos su derivada total [según (3.6)]:

$$\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y} = xy + ax^2 - xy + by^2 + cy^3.$$

dos términos se cancelan. Para que sea $\dot{V} \leq 0$ para (x, y) cerca de $(0, 0)$, tiene que ser $a \leq 0$, $b \leq 0$. Si $b = 0$, el último término puede causar $\dot{V} > 0^2$; en este caso había que suponer $c = 0$. Si en cambio, $b < 0$, tenemos

$$\dot{V} = \underbrace{ax^2}_{\leq 0} + \underbrace{bx^2}_{\leq 0} \left(1 + \frac{c}{a}y\right).$$

siendo la expresión entre paréntesis positiva para $|y|$ pequeño, vale $\dot{V} \leq 0$ en cierta vecindad de $(0, 0)$, y el Teorema 3.1.7 (con la Nota 2) da la estabilidad. Así tenemos:

Si $a \leq 0$ y $b < 0$, o $a \leq 0$, $b = 0$, $c = 0$, $(0, 0)$ es estable. (En el primer caso, c es arbitrario, ver Figura 3.3).

EJEMPLO 3.1.10. En el ejemplo anterior, al poner $a = 0$, $c = 0$, da el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + by, \end{aligned} \tag{3.8}$$

o escrito como una sola ecuación de segundo orden,

$$\ddot{x} - b\dot{x} + x = 0,$$

que es la ecuación de un *oscilador amortiguado* si $b < 0$, y *no amortiguado* para $b = 0$.

²De hecho, tomando $x = 0$, $y = \epsilon \operatorname{sgn} c$ ($\epsilon > 0$), resultaría $\dot{V} = \epsilon^3 c \operatorname{sgn} c = \epsilon^3 |c| > 0$.

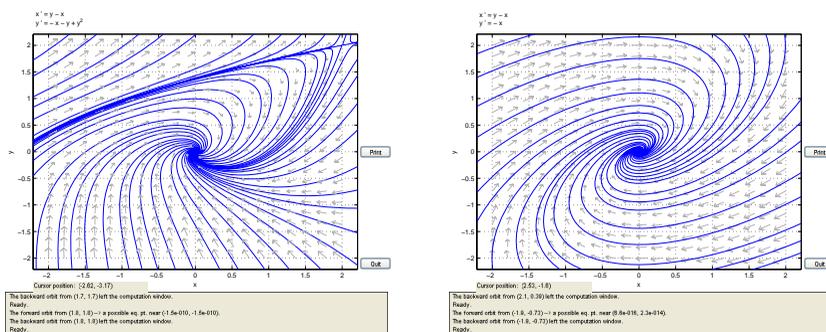


Figura 3.3. Lustración del Ejemplo 3.1.9. Izquierda: $a = -1$, $b = -1$ y $c = 1$. Derecha: $a = -10$, $b = 0$, $c = 0$.

EJEMPLO 3.1.11. Dado el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + z, \\ \dot{y} &= -x + z, \\ \dot{z} &= ax + by + cz^3.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Encontrar los valores a , b , c tales que el origen resulte estable.

Solución. Ponemos $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$. Entonces $\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = xy + xz - xy + yz + axz + byz + cz^4 = (a + 1)xz + (b + 1)yz + cz^4$; Si se pone $a = b = -1$, $c \leq 0$, resulta $\dot{V} = -|c|z^4 \leq 0$, y se cumplen las hipótesis del Teorema 3.1.7

EJEMPLO 3.1.12. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y, \\ \dot{y} &= -x - y^3.\end{aligned}\tag{3.10}$$

En este caso, la función $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, no da resultado:

$$\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y} = 2xy - xy - y^4 = xy - y^4.$$

Esta no tiene signo fijo:

$$\begin{aligned}\dot{V}(0, y) &< 0 \quad (y \neq 0), \\ \dot{V}\left(1, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{16} > 0.\end{aligned}$$

Probamos una forma cuadrática más general:

$$V = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2),$$

entonces

$$\dot{V} = ax\dot{x} + by\dot{y} = 2axy - bxy - by^4 = (2a - b)xy - by^4.$$

Para anular el término mixto, elegimos $a = 1$, $b = 2$, lo cual da:

$$\dot{V} = -2y^4 \leq 0.$$

El origen resulta estable, ver Figura 3.4.

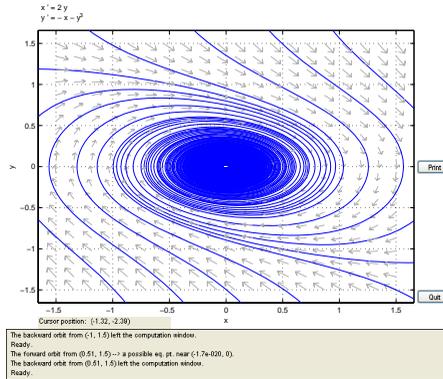


Figura 3.4. Lustración del Ejemplo 3.1.12.

OBSERVACIÓN 5. Todas las funciones de Lyapunov usados en estos ejemplos eran de la forma general:

$$V(x, y) = ax^2 + by^2. \quad (3.11)$$

Estas son *formas cuadráticas positivas definidas* para $a > 0$, $b > 0$, es decir, positivas para $(x, y) \neq (0, 0)$. En el caso $a = b = 1$, V es el cuadrado de la norma Euclideana, así que la condición $\dot{V} \leq 0$ significa que la distancia del punto pt , $p = (x, y)$, con respecto al origen es una función creciente de t . [Análogamente para el caso n -dimensional.] Los *conjuntos de nivel* de V en este caso son superficies esféricas. Las trayectorias las intersectan desde el exterior hacia el interior.

En el caso general, (3.11) representa una elipse (en el caso $n = 3$ un elipsoide, etcétera). Los conjuntos de nivel de V son curvas (superficies) elípticas (elipsoidales), y las órbitas las intersectan desde el exterior hacia el interior. (Ver la Figura 3.5.)

Estos tipos de funciones son las más comúnmente usadas como funciones de Lyapunov, salvo cuando se usan funciones inspiradas en nociones de la física (como la energía), como veremos más adelante.

EJERCICIO 3.2. Probar la estabilidad del origen en los siguientes casos:

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -x - x^3, \\ \dot{y} &= -y + y^2 - x^2 y. \end{aligned}$$

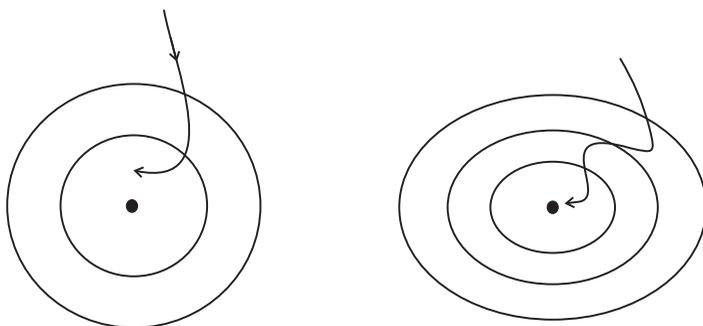


Figura 3.5. Los conjuntos de nivel de V son curvas elipsoidales, y las órbitas las intersectan desde el exterior hacia el interior.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \dot{x} = -x^3 + y, \\
 & \dot{y} = ay - y^3 \quad (a < 0). \\
 & \dot{x} = y, \\
 (3) \quad & \dot{y} = -ax, \\
 & \dot{x} = -z + xz.
 \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 6. En el caso del ejemplo 3.1.4³ no es fácil encontrar una función de Lyapunov que sirva: tomando $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, resulta

$$\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y} - x^4 - xy - y^2.$$

Esta función no es menor o igual a cero cerca del origen. [Tomando por ejemplo, $x = 10^{-1}$, $y = -10^{-2}$, resulta $\dot{V} = -10^4 + 10^{-3} - 10^{-4} = 10^{-3} - 2 \times 10^{-4} > 0$.] En casos como este es más eficaz el método geométrico (usando signos) que el de la función de Lyapunov.

EJEMPLO 3.1.13. Consideremos la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + g(x) = 0, \quad xg(x) > 0 \quad (x \neq 0), \quad g(0) = 0.$$

(Se cumple, por ejemplo para $g(x) = x$). Solución: Ponemos $\dot{x} = y$; entonces obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= y, \\
 \dot{y} &= -g(x).
 \end{aligned}$$

En un contexto físico, g , es una fuerza (proporcional a la aceleración \ddot{x} [masa = 1]). Ya que la función de Lyapunov está inspirada por la energía, cuyo gradiente es la fuerza, se puede pensar en introducir la

³ $\dot{x} = -x^3$, $\dot{y} = -x - y$.

integral definida por g^4 :

$$G(x) = \int_0^x g(\tau) d\tau;$$

(energía potencial).

Agregamos la energía cinética: $\frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{1}{2}y^2$. Da la *energía total*:

$$V(x) = \frac{y^2}{2} + G(x).$$

Ya que el sistema es sin amortiguación (en tal caso aparecería un término con \dot{x}), se conjetura que V es constante. Verificación de esto:

(1) Consideremos V como función de Lyapunov. Es positiva definida:

Para

$$x \geq 0 : g \geq 0, \Rightarrow \underbrace{\int_0^x g(\tau) d\tau}_{G(x)} > 0$$

(en caso $x < 0$ porque tanto $g(x)$ como x son negativas.) Resulta $V > 0$ ($x \neq 0$). Es una función real continua que es *integral primera* (integral de la energía) cuyas líneas de nivel son invariantes.

(2)

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= y\dot{y} + \frac{d}{dx} \int_0^x g(\tau)\dot{x}(\tau) d\tau \\ &= -g(x)y + g(x)y \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces V es constante a lo largo de las órbitas. Por lo tanto las líneas de nivel forman ovaloides y son órbitas. Para el nivel $V = k^2$ resulta: $y = \sqrt{2(k^2 - G(x))}$. El origen es un centro (independiente de la forma específica de g (!depende sólo de sus signos!)).

EJERCICIO 3.3. Hacer lo mismo pero con amortiguación:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -g(x) - h(y), \end{aligned}$$

donde g como antes, $yh(y) > 0$, $y \neq 0$, continua.

⁴trabajo=fuerza por camino

En el caso del sistema lineal:

Supongamos el caso en el cual todos los autovalores tienen partes reales negativas y simples: se puede reducir a la forma diagonal

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\lambda_n \end{pmatrix}$$

(caso de λ_k para $k = 1, \dots, n$ son reales), así que:

$$\dot{x}_1 = -\lambda_1 x_1, \dots, \dot{x}_n = -\lambda_n x_n \quad (\lambda_k > 0; k = 1, \dots, n)$$

Tómese la función

$$V(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2}(x_1^2, \dots, x_n^2),$$

resulta,

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + \dots + x_n \dot{x}_n = -\lambda_1 x_1^2 - \dots - \lambda_n x_n^2 < 0,$$

salvo para $x = \mathbf{0}$. Por lo tanto el origen $\mathbf{0}$ es globalmente asintóticamente estable (GAS).

3.1.2. Diversas condiciones para la estabilidad.

a) La condición necesaria de Zubov.

Sea M un conjunto compacto en un espacio métrico X , invariante bajo un sistema dinámico definido en X .

TEOREMA 3.1.14. *Si existe un punto $p \notin M$ tal que el conjunto límite negativo de p intersecta M ,*

$$\Lambda^-(p) \cap M \neq \emptyset, \quad (3.12)$$

entonces M es inestable.

Demostración. Supongamos que (3.12) tiene un valor para algún punto $p \notin M$. Sea $q \in \Lambda^-(p) \cap M$. Elegimos $\epsilon > 0$ tal que $d(p, M) > \epsilon$. [ϵ existe por ser M cerrado.] Dado cualquier $\delta > 0$, existe un punto

$$q' \in B_\delta(q) \cap \gamma^-(p),$$

o sea, $p \in \gamma^+(q')$, donde $q' \in B_\delta(M)$ [por ser $q \in M$] y $p \notin B_\epsilon(M)$, los cuales contradicen a la definición de estabilidad (ilustramos este teorema mediante la Figura 3.6.) \square

OBSERVACIÓN 7. La condición del Teorema 3.1.14 (*Condición de Zubov*) no es suficiente para la estabilidad.

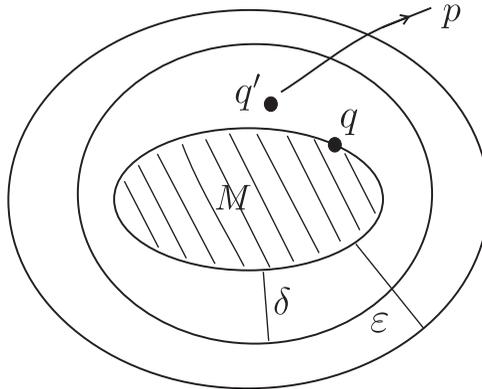


Figura 3.6. Ilustración del Teorema 3.1.14 (de Zubov.)

EJEMPLO 3.1.15. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= 0,\end{aligned}\tag{3.13}$$

Sea $M = \{(0, 0)\}$. Obsérvese que todos los puntos con $y = 0$ son puntos críticos. El origen no es estable. De hecho, para cualquier punto inicial $P_0 = (0, \delta)$, la solución correspondiente es $x(t) = \delta t$, $y(t) = \delta$. La variable x asume para $t > 0$ valores arbitrariamente grandes, lo cual obviamente demuestra la inestabilidad.

Por otra parte la condición de Zubov se cumple: los puntos de la recta $y = 0$ coinciden con sus conjuntos límites, y los demás tienen conjuntos límites vacíos. (Ver la Figura 3.7).

El próximo teorema muestra que en un caso importante, la condición de Zubov si es necesaria y suficiente para la estabilidad.

Definimos primero:

DEFINICIÓN 3.1.16. El conjunto invariante compacto M es *aislado* (entre conjuntos compactos invariantes), si existe una vecindad U de M tal que cualquier conjunto compacto invariante contenido en U está contenido en M .

EJEMPLO 3.1.17. En el ejemplo 3.1.15 el origen no es aislado como conjunto invariante, porque es punto de acumulación de puntos críticos.

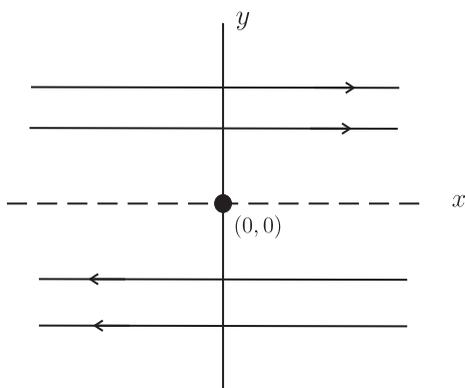


Figura 3.7. Ilustración de la Observación 3.7.)

EJEMPLO 3.1.18. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(x-1), \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}\tag{3.14}$$

El sistema tiene dos puntos críticos [obtenidos poniendo $\dot{x} = \dot{y} = 0$], a saber $p_1 = (0, 0)$, $p_2 = (1, 0)$. La recta $y = 0$ es invariante (pues $y = 0$ implica $\dot{y} = 0$, y por la unicidad), lo mismo con el intervalo $0 \leq x \leq 1$ de ella (siendo delimitado por punto críticos). Denotamos $M = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$. Este conjunto es *aislado* como conjunto compacto invariante, pues si tomamos como vecindad U todo el plano, todas las órbitas fuera de M son acotadas; por eso no pueden formar conjuntos compactos invariantes. [De hecho, todas las órbitas con $y \neq 0$ son no acotadas para $t < 0$, y en la recta $y = 0$ sólo las dentro del intervalo $0 \leq x \leq 1$ son acotadas en ambos sentidos.] Así que los únicos conjuntos compactos invariantes son los contenidos en M , que son tres: M , $\{p_1\}$ y $\{p_2\}$. (Ver la Figura 3.8).

TEOREMA 3.1.19. *Si el espacio X es localmente compacto M es un conjunto compacto aislado, la condición necesaria y suficiente para la estabilidad de M es que para cualquier punto $p \notin M$ vale (3.12).*

Demostración. (Un bosquejo.) Supongamos que M sea inestable. Entonces existe $\epsilon > 0$ y dos sucesiones de puntos $(p_n), (q_n)$ tales que $d(p_n, M) \rightarrow 0$, $q_n \notin B_\epsilon(M)$ y $q_n \in \mathcal{Y}^+(p_n)$. (Ver la Figura 3.9).

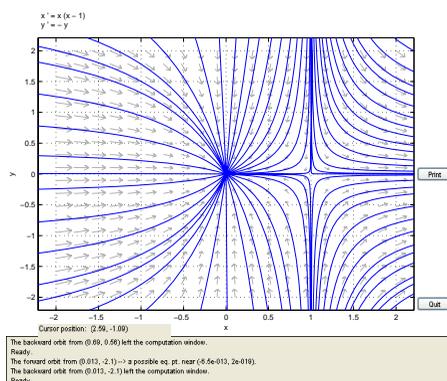


Figura 3.8. Ilustración del Ejemplo 3.1.18.)

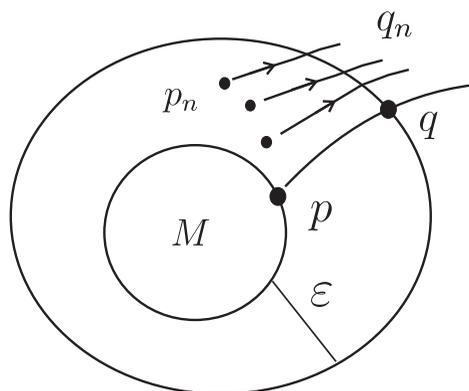


Figura 3.9. Ilustración de la demostración del Teorema 3.1.19.)

Podemos suponer que $d(q_n, M) = \epsilon$ y $p_n[0, t_n] \subset B_\epsilon(M)$, donde t_n son tales que $q_n = p_n t_n$. En otras palabras, los puntos q_n son donde las órbitas alcanzan por primera vez la frontera de $B_\epsilon(M)$. La existencia de t_n y q_n es consecuencia de la continuidad del movimiento. [De hecho sea (para n fijo) s_n el ínfimo de todos los $t > 0$ tales que $p_n t \notin B_\epsilon(M)$. Entonces $p_n s_n \in B_\epsilon(M)$ implicaría lo mismo para $p_n t$ con t cerca de s_n , lo cual contradice la definición de s_n . Resulta $s_n = t_n$.]

Debido a la compacidad local del espacio podemos suponer $\overline{B_\epsilon(M)}$ compacto por ser M compacto⁵.

Entonces, los puntos q_n pertenecen al conjunto compacto $\overline{B_\epsilon(M)}$ y tienen un punto de acumulación q . Además $\gamma^-(q) \subset \overline{B_\epsilon(M)}$, pues si existiese un $t > 0$ tal que $q(-t) \notin \overline{B_\epsilon(M)}$ mientras que $q_n(-t) \in B_\epsilon(M)$ y $q_n(-t) \rightarrow q(t)$, resultaría $q(-t) \in \overline{B_\epsilon(M)}$, tendríamos una contradicción. Entonces también sería $\Lambda^-(q) \subset \overline{B_\epsilon(M)}$, y siendo el conjunto límite invariante (Teorema 2.4.2) y compacto, tendría que estar contenido en M debido al aislamiento de este. [Se puede suponer que $\overline{B_\epsilon(M)}$ pertenece a la vecindad U que figura en la definición.] \square

b) **La prolongación y la condición de Ura. El conjunto de inestabilidad.**

DEFINICIÓN 3.1.20. A cada punto p asociamos un conjunto $D^+(p)$, llamado la *prolongación positiva* de p , (más correctamente, la *primera prolongación positiva*, pero por ahora no consideraremos ninguna otra). Esta está definida como el conjunto de todos los puntos q para los cuales existen puntos p_n y números $t_n > 0$ tales que

$$p_n \rightarrow p, \quad p_n t_n \rightarrow q.$$

La *prolongación negativa*, $D^-(p)$, se define de la misma manera salvo con $t_n < 0$.

La prolongación positiva (negativa) de p consiste de todos los puntos aproximables mediante semiórbitas positivas (negativas) con puntos iniciales arbitrariamente cercanos a p .

La prolongación contiene obviamente la *cerradura de la semiórbita correspondiente* (la cual corresponde al caso $p_n = p$ ($\forall n$)).

PROPOSICIÓN 3.1.21. *La prolongación $D^\pm(p)$ es:*

- cerrada;*
- positivamente/negativamente invariante;*
- representable en la forma:*

$$D^\pm(p) = \bigcap \{ \overline{\gamma^\pm(B_\delta(p))} \mid \delta > 0 \}.$$

Demostración. Dejamos la demostración como ejercicio. [b) es fácil, c) relativamente fácil, a) más complicado.]

⁵Si M es compacto y el espacio es localmente compacto, a cada punto $p \in M$ se puede asignar una vecindad de cerradura compacta, y un subconjunto finito de ellas forma una vecindad de M que contiene una ϵ -vecindad con ϵ suficientemente pequeño. Ver la Figura 3.10.

Ejemplos de prolongaciones. Los casos donde la prolongación coincide con la cerradura de la semiórbita son triviales. Los no triviales son los donde $D^+(p)$ se extiende *más allá del conjunto límite*.

EJEMPLO 3.1.22. Dado el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

¿Cuales son las prolongaciones $D^\pm(\mathbf{0})$ [$\mathbf{0} = (0, 0)$]?

Respuesta:

$$D^+(\mathbf{0}) = \{(x, y) \mid x \geq 0, y = 0\}, \tag{3.16}$$

$$D^-(\mathbf{0}) = \{(x, y) \mid x \leq 0, y = 0\}. \tag{3.17}$$

Pues las soluciones son

$$x(t) = x_0 + yt, \quad y(t) = y_0.$$

Poniendo

$$p_n^\pm = (0, y_n^\pm), \quad y_n^\pm \geq 0, \quad y_n^\pm \rightarrow 0,$$

resulta $p_n^\pm t = (y_n^\pm t, y_n^\pm)$, los cuales, par t fijo, $n \rightarrow \infty$, convergen a $\mathbf{0}$.

Ponemos $y_n^\pm = \pm \epsilon_n$, $t_n(\frac{t'}{\epsilon_n})$. Así resulta $p_n^\pm t_n = (\pm t', 0)$; variando t' en \mathbb{R}^+ , esto cubre la semirecta $\mathbb{R}^\pm \times \{0\}$. Ver la Figura 3.10.

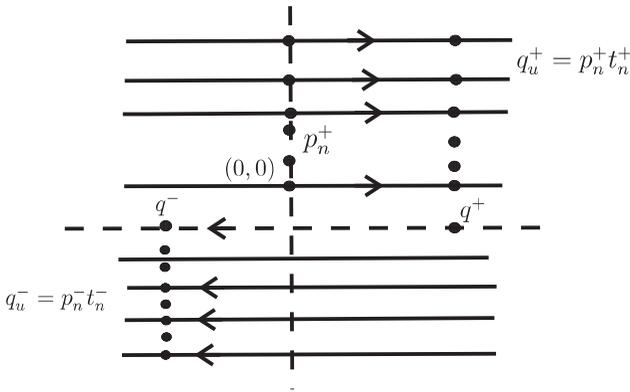


Figura 3.10

Se puede expresar la relación de prolongación así:

El punto q está en la prolongación positiva de p si existe una sucesión de órbitas que se acumulan tanto en p como en q y que pasan primero cerca a p y después cerca a q .

EJERCICIO 3.4. (a) Dado el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x, \\ \dot{y} &= -y,\end{aligned}$$

determine la prolongación $D^+(p)$ para $p = (0, -1)$. [Dibuje primero el retrato fase del sistema, y aplique la observación que acabamos de hacer.]

(b) Sea $q \in \Lambda^-(p)$. Pruebe que $p \in D^+(q)$. Esto es un caso especial de la relación de simetría

$$q \in D^+(p) \Leftrightarrow p \in D^-(q).$$

TEOREMA 3.1.23. [Condición de Ura.] Si M es compacto y el espacio X localmente compacto, M es estable si y sólo si

$$D^+(M) = M. \quad (3.18)$$

Demostración. a) Si vale (3.18), M es estable (suficiencia). Supongamos que M sea inestable [Condición de Ura]. Entonces existen $\epsilon > 0$, (p_n) , (t_n) tales que $p_n \rightarrow p \in M$ y $q_n := p_n t_n \in \partial B_\epsilon(M)$ (t_n). (Ver la Figura 3.11.)

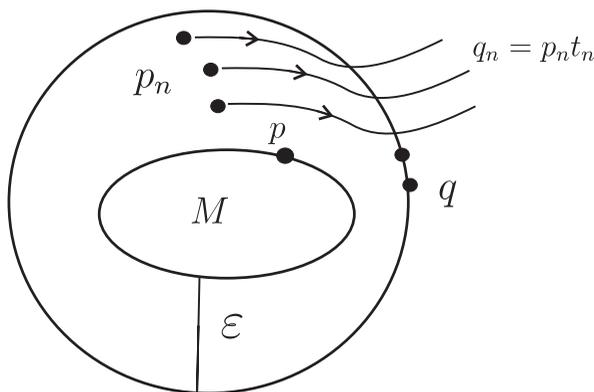


Figura 3.11

[De hecho, para encontrar p , observamos que los p_n pueden ser elegidos de tal manera que $d(p_n, M) \rightarrow 0$, lo cual significa que

$$(\exists p'_n \in M) d(p_n, p'_n) \rightarrow 0.$$

Entonces (p_n) [y por ende (p'_n)] posee una subsucesión convergente por ser M compacto; sea $p = \lim p'_n (= \lim p_n)$. Debido a la compacidad local del espacio, M posee una vecindad compacta; en particular podemos suponer que la cerradura de $B_\epsilon(M)$ sea compacta. Entonces la sucesión (q_n) posee un punto de acumulación q que está ubicado en $\partial B_\epsilon(M)$, lo cual implica $q \notin M$. Por *depuración* de la sucesión (p_n) se ve que $q \in D^+(M)$, lo cual contradice (3.18).

b) Si M es estable, vale (3.18) [necesidad]. Esta parte la dejamos como ejercicio. \square

Además se puede observar, que esta parte del teorema no depende ni de la compacidad de M ni de la compacidad local de X . Así que tenemos:

TEOREMA 3.1.24. *Para un sistema dinámico en un espacio métrico M vale: Si el conjunto cerrado M es estable, vale la relación (3.1.18).*

Por fin probaremos mediante un ejemplo, que para la parte de la suficiencia, la compacidad local de M es indispensable.

EJEMPLO 3.1.25. Consideremos el espacio X obtenido de \mathbb{R}^2 eliminando el conjunto $\{(x, y) \mid x > 0, y = 0\}$ y el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 + y^2, \\ \dot{y} &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

El origen es inestable, en \mathbb{R}^2 sería $D^+(\mathbf{0}) = \mathbb{R}^+ \times \{0\}$; pero este conjunto no pertenece a X . (Ver la Figura 3.12).

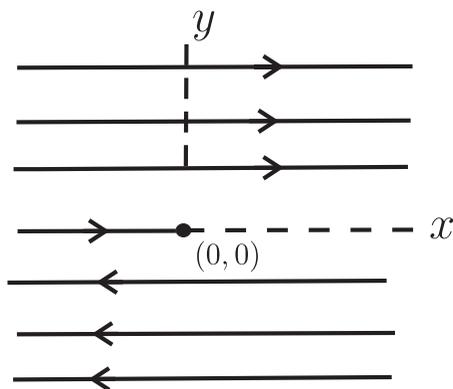


Figura 3.12

3.2. Conjuntos límites, conjuntos límites prolongacionales y puntos errantes. El teorema de LaSalle (principio de invariancia)

3.2.1. Conjuntos límites prolongacionales y conceptos relacionados.

DEFINICIÓN 3.2.1. El conjunto límite prolongacional positivo⁶ de un punto p , denotado por $J^+(p)$, es el conjunto de todos los puntos q para los cuales existen sucesiones (p_n) y (t_n) tales que $p_n \rightarrow p$, $t_n \rightarrow +\infty$, $q_n := p_n t_n \rightarrow q$.

Análogamente, se define el *conjunto límite prolongacional negativo*, $J^-(p)$, cambiando la condición para los t_n en $t_n \rightarrow -\infty$.

PROPOSICIÓN 3.2.2. *Los conjuntos $J^\pm(p)$ pueden expresarse de la siguiente manera:*

$$J^\pm(p) = \bigcap \{D^\pm(pt) \mid t \geq 0\}. \quad (3.20)$$

PROPOSICIÓN 3.2.3. a) *A las prolongaciones $D^\pm(p)$ se les puede representar como sigue:*

$$D^\pm(p) = \gamma^\pm(p) \cup J^\pm(p). \quad (3.21)$$

b) $J^\pm(p)$ son cerrados e invariantes.

c) Si $q = pt$, $J^\pm(q) = J^\pm(p)$.

Primero observemos que existen ciertas analogías llamativas entre los conceptos que figuran aquí y los conceptos tratados en el capítulo 1. Mientras que las semiórbitas γ^\pm juegan el mismo papel en ambos casos, se corresponden por una parte las cerraduras de las semiórbitas y las prolongaciones D^\pm , por la otra los conjuntos límites Λ^\pm y los conjuntos límites prolongacionales J^\pm . De hecho, todos son cerrados, $\overline{\gamma^\pm}$ y $\overline{D^\pm}$ son semi-invariantes, Λ^\pm y J^\pm invariantes. Los dos últimos pares de conjuntos son los mismos para para todos los puntos de la misma órbita, por cual razón se puede hablar de los dos conjuntos límites y dos conjuntos límites prolongacionales de una órbita, y de los de una semiórbita que tengan el mismo signo. Igualmente, se observan las analogías entre las representaciones d) del Teorema 2.4.2 y (3.20) por un lado, y entre e) del mismo Teorema 2.4.2 y (3.21) por el otro. En lo que se refiere a las demostraciones, estas son también parecidas a las correspondientes del Capítulo 1. Por eso nos limitamos aquí a agregar las demostraciones que aparecen en la literatura. En el *Lema 3*, reproducido aquí⁷ la parte i) corresponde a la parte a) de nuestra

⁶Más exactamente, se debería llamarlo *primer conjunto límite prolongacional positivo* Pero, ya que no consideramos más que este, suprimimos el adjetivo *primer* [los de ordenes superiores están tratados en Bhatia y Szegö, obra cit., cap. VII, §3.7]

⁷Ver Boletín de la Sociedad Matemática mexicana, 9(1964), pp.59.

Proposición (3.2.3), (ii) a la Proposición (3.2.2), (iii) a la segunda mitad de b) en la Proposición (3.2.3), y (iv) a la parte c) de la misma.

Además hay que tomar en cuenta que en este trabajo se usa en lugar de J^+ la notación más antigua, Λ_D^+ (en desuso).

LEMA 3.2.4. *Sea $x \in X$. Entonces*

- (i) $D^+(x) = \gamma^+(x) \cup J^+(x)$;
- (ii) $J^+(x) = \bigcap \{D^+(xt) \mid t \in \mathbb{R}\} = \bigcap \{D^+(xt) \mid t \geq t_0\}$ para cualquier número real t_0 ;
- (iii) $J^+(x)$ es (positivamente y negativamente) invariante; y
- (iv) Si $t \in \mathbb{R}$, $J^+(xt) = J^+(x)$.

Demostración. (i),(iii) son consecuencia inmediata de la definición. Para demostrar (ii), primero observamos que $J^+(x)$ está contenido en ambas expresiones de la derecha. Si $y \in D^+(xt)$, para todo t (arbitrariamente grande), entonces para cualquier t y para cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\tau > 0$ y un $x' \in X$ con $d(x, x') < \epsilon$ tal que $d(y, x'(t + \tau)) < \epsilon$. se sigue inmediatamente que $y \in J^+(x)$. Finalmente,

$$\begin{aligned} J^+(xt) &= \bigcap \{D^+(xst) \mid s \in \mathbb{R}\} \\ &= \bigcap \{D^+(x(t+s)) \mid s \in \mathbb{R}\} \\ &= \bigcap \{D^+(xs) \mid s \in \mathbb{R}\} = J^+(x). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Esto demuestra (iv). □

Los detalles de las demostraciones de las partes (i) y (iii) pueden llenarse como *ejercicios*. La demostración de que $J^\pm(p)$ son cerrados es parecida a la correspondiente relativa a Λ^\pm , aunque un poco más complicada. Una demostración se encuentra en [B-Z]. Otro resultado útil es el siguiente.

PROPOSICIÓN 3.2.5. *Si $q \in \Lambda^\pm(p)$, entonces $J^\pm(p) \subset D^\pm(q)$. En particular, si $\Lambda^\pm(p) \neq \emptyset$, $J^\pm(p) \subset D^\pm(\Lambda^\pm(p))$.*

[En este caso *el conjunto límite prolongacional de un punto está contenido en línea prolongación de su conjunto límite.*] Agregamos la demostración tomada de la misma fuente. Hay que observar que en el enunciado falta la hipótesis $\Lambda^+(x) \neq \emptyset$, pues de hecho puede ocurrir que $\Lambda^+(x)$ es vacío mientras que $J^+(x)$ no lo es. Esto sucede en el caso de un *punto silla impropio* (o *punto silla en el infinito*) al cual veremos en seguida.

LEMA 3.2.6. *Si $x \in X$ y $\omega \in \Lambda^\pm(x)$, entonces $J^+(x) \subset D^+(\omega)$. (Consecuentemente $J^+(x) \subset D^+(\Lambda^+(x))$).*

Demostración. Sea $y \in J^+(x)$. Entonces existen sucesiones $\{x_n\}$ y $\{t_n\}$ con $x_n \rightarrow x$, $t_n \rightarrow +\infty$, y $x_n t_n \rightarrow y$. Puesto que $\omega \in \Lambda^+(x)$, existe

una sucesión τ_n con $\tau_n \rightarrow \infty$ tal que $x(\tau_n) \rightarrow \omega$. Podemos suponer si pérdida de generalidad que $t_n - \tau_n > 0$ para cada n . Consideremos las sucesiones $\{x_n \tau_1\}, \{x_n \tau_2\}, \{x_n \tau_3\}, \dots$. Por la continuidad de π , tenemos $x_n \tau_k \rightarrow x \tau_k$ para cada k fija. Podemos elegir subsucesiones (x'_n) de (x_n) con la propiedad: $d(x'_n \tau_n, x \tau_n) \leq \frac{1}{n}$ y $d(x'_n \tau_n, x \tau_n) \leq \frac{1}{n}$ para $m \geq r$ donde $x'_n = x_r$. La sucesión $\{x'_n \tau_n\}$ tiende a ω . En realidad, $d(x'_n \tau_n, \omega) \leq d(x'_n \tau_n, x \tau_n) + d(x \tau_n, \omega) \leq \frac{1}{n} + d(x \tau_n, \omega) \rightarrow 0$. Note además que, si $\{t'_n\}$ es la subsucesión de $\{t_n\}$ correspondiente a la subsucesión $\{x'_n\}$ de $\{x_n\}$, entonces $t'_n - \tau_n > 0$ para cada n . También, puesto que $\{x'_n t'_n\}$ es una subsucesión de $\{x_n t_n\}$, se sigue que $x'_n t'_n \rightarrow \gamma$. Pero $x'_n t'_n = (x'_n \tau_n)(t'_n - \tau_n)$, y, puesto que $x'_n \tau_n \rightarrow \omega$ y $t'_n - \tau_n > 0$, tenemos $\gamma \in D^+(\omega)$. Esto completa la demostración. \square

Ejemplos de conjuntos límites prolongacionales.

EJEMPLO 3.2.7. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 + y^2, \\ \dot{y} &= 0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Todas las órbitas son rectas horizontales o partes de tales. El único punto crítico es el origen (sólo en él se anulan simultáneamente).

Fijamos los puntos $p = (x_1, 0)$, $q = (x_2, 0)$, $x_1 < 0 \leq x_2$, entonces $q \in J^+(p)$, pero $q \notin \gamma^+(p)$. De hecho, $\gamma^+(p) = \{(x, y) \mid x_1 \leq x \leq 0, y = 0\}$, mientras que $J^+(p) = \{(x, y) \mid x \geq x_1, y = 0\}$, ya que las órbitas rectilíneas con $y \neq 0$ se acumulan tanto en p como en q y están orientadas en el sentido de x creciente. (Ver Figura 3.13).

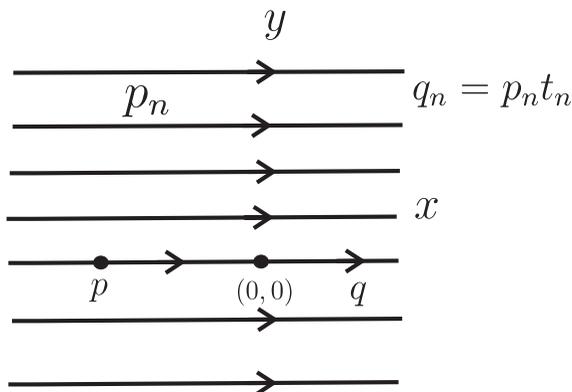


Figura 3.13

EJEMPLO 3.2.8. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x, \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Este sistema tiene el origen como conjunto silla⁸. Si p , q están ubicados en las separatrices que tienden a o en sentido positivo/negativo, respectivamente, entonces vale $q \in J^+(p)$, ya que existe una familia de órbitas que se acumulan en ambos puntos y tienen la orientación correspondiente. (Ver la Figura 3.14).

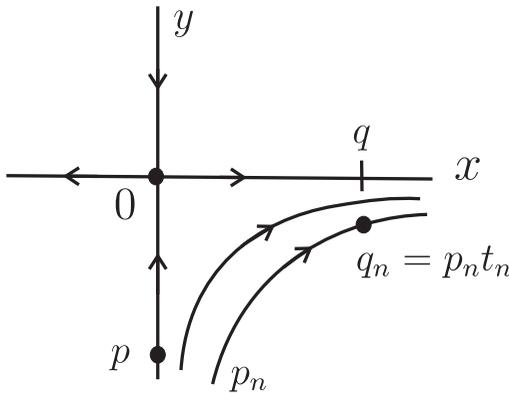


Figura 3.14

EJERCICIO 3.5. Determine el conjunto $J^+(p)$, $p = (0, 1)$ para el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1-x), \\ \dot{y} &= y(x - \frac{1}{2}).\end{aligned}\tag{3.25}$$

DEFINICIÓN 3.2.9. Se dice que el sistema tiene un punto silla impropio (o también punto silla en el infinito) si existen puntos p con las propiedades

$$\Lambda^+(p) = \emptyset, \quad J^+(p) \neq \emptyset.$$

(o lo mismo con los signos invertidos).

EJEMPLO 3.2.10. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= 1 - y^2.\end{aligned}\tag{3.26}$$

⁸El concepto de *prolongación* fue concebido originalmente por Poincaré y por Bendixson en el contexto de un punto silla, y después generalizado por Ura.

Este sistema no tiene puntos críticos (pues \dot{x} se acumula en $y = 0$, \dot{y} en $y = \pm 1$). Hay dos órbitas rectilíneas: $y = \pm 1$. La derivada de x cambia de signo al cruzar la órbita al eje x , lo cual tiene la consecuencia de que la franja $-1 < y < 0$ está llenada de semiórbitas negativas que se acumulan en la órbita $y'(y = -1)$, y $0 < y < 1$ por semiórbitas positivas que se acumulan en $y''(y = 1)$. Ver la Figura 3.15.

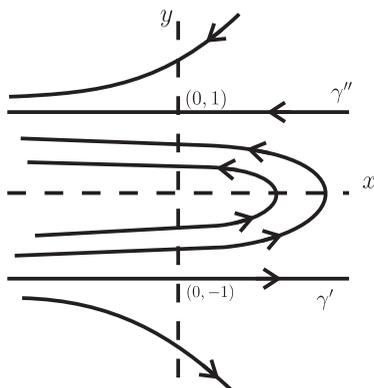


Figura 3.15

Así que la misma familia de órbitas se acumulan en todos los puntos tanto de y' como de y'' , y en consecuencia, si $p \in y'$, $q \in y''$, vale $q \in J^+(p)$, ya que cada órbita se acerca primero a p y después a q (en sentido de t creciente). Por otra parte, vale $\Lambda^+(p) = \Lambda^+(q) = \emptyset$, así que se cumplen las condiciones para un punto silla impropio. Nótese que en este caso, como el de una silla impropia en general, la Proposición 3.2.5 no es aplicable, porque falla la hipótesis $\Lambda^+(p) \neq \emptyset$.

DEFINICIÓN 3.2.11. El punto p se dice *errante* si $p \notin J^+(p)$. Si $p \in J^+(p)$, a p se le llama *no errante*.

PROPOSICIÓN 3.2.12. El punto p es errante si y sólo si $p \notin J^+(p)$. I.e., no hay diferencia entre errante en sentido positivo y negativo, (contrario al caso de la estabilidad de Poisson).

Esto es una consecuencia inmediata de la antisimetría de las relaciones binarias $q \in J^\pm(p)$:

$$q \in J^+(p) \Leftrightarrow p \in J^-(q) \quad (3.27)$$

la cual a su vez es una consecuencia inmediata de las definiciones.

La relación (3.27) es la misma que vale para y^+ y^- , y para P^+ y P^- . En cambio no vale Λ^+ , Λ^- como muestra el ejemplo de $\dot{x} = -x$, tomando

$p = 1$, $q = 0$. En este caso vale $q \in \Lambda^+(p)$, pero $\Lambda^-(q) = \{q\}$, así que $p \notin \Lambda^-(q)$. (Ver la Figura 3.16).

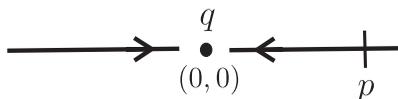


Figura 3.16

Este último tiene que ver con la no antisimetría entre la estabilidad de Poisson positiva y negativa.

La antisimetría tampoco vale para γ^\pm , como muestra el mismo ejemplo.

Mencionamos que *la estabilidad de Poisson, en cualquiera de los dos sentidos implica la propiedad de no errante*, (porque $\Lambda^\pm \subset J^\pm$), o equivalentemente *errante implica no Poisson estable en ninguno de los dos sentidos*.

EJERCICIO 3.6. Pruebe que p es errante si y sólo si se cumple la condición siguiente:

Existe una vecindad U de p y $T > 0$ tales que

$$U \cap Ut = \emptyset \text{ para todo } t \geq T.$$

{Esta es la definición antigua de *errante* (antes de la introducción de los conjuntos J^\pm , por ejemplo en [N-S], obra cit., p. 353).}

EJERCICIO 3.7. Probar que si p es errante (no errante), cualquier $q \in \gamma(p)$ tiene la misma propiedad. Se trata de *propiedades de la órbita*.

TEOREMA 3.2.13. *Los puntos límites son errantes.*

Demostración. Sea $q \in \Lambda^+(p)$. Entonces existe una sucesión (t_n) tal que $pt_n \rightarrow q$ y $t_n \rightarrow +\infty$. Podemos elegir una subsucesión (t'_n) de (t_n) tal que $t'_n \geq t_n + n$. Denotamos $p_n := pt_n$, $q_n := pt'_n$, $t''_n := t'_n - t_n (\geq n)$. Entonces vale $q_n = pt_n(t'_n - t_n) = p_n t''_n \rightarrow q$ (por ser (q_n) una subsucesión de (p_n) que tiende a q y $t''_n \geq n \rightarrow +\infty$.) Tenemos en resumen: $p_n \rightarrow q$, $q_n \rightarrow q$, $q_n = p_n t''_n$, $t''_n \rightarrow +\infty$, de donde $q \in J^+(q)$, i.e., que es no errante. \square

3.2.2. Localización de conjuntos límites. El teorema de LaSalle. (Principio de invariancia.) Uno de los pasos más importantes en el análisis cualitativo de un sistema diferencial consiste en determinar donde se ubican los conjuntos límites. Para esto podemos utilizar un tipo de función parecida a la función de Lyapunov que se llama *función de LaSalle*.

TEOREMA 3.2.14. *Dado un sistema dinámico en un espacio X y una función continua v de X en \mathbb{R} con la propiedad de que la función v sea no creciente a lo largo de las órbitas ($t \geq 0 \Rightarrow v(pt) \leq v(p)$). Entonces v es constante a lo largo de las órbitas que constituyen los conjuntos límites.*

(Recordamos que los conjuntos límites son invariantes, o sea, constan de órbitas enteras [Teorema 2.4.2, parte b)).

Si el sistema dinámico está dado por una ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$, la condición de constancia de v a lo largo de una órbita se reduce a que la derivada de Lie, $\dot{v}(x) = (\nabla v, f)(x)$, se anule a lo largo de ella. [Vea la ecuación (3.6)]. Entonces podemos formular el teorema de la forma más condensada:

$$(\forall x) \Lambda^\pm(x) \subset \{x' \mid \dot{v}(x') = 0\}. \quad (3.28)$$

Sin embargo, no todos los puntos de este último conjunto tienen que ser puntos límites (por ejemplo, \dot{v} puede ser constante, y entonces el conjunto es todo el espacio entero). Para localizar con más precisión los conjuntos límites del sistema, utilizamos el hecho de que estos son invariantes (de esto se deriva el nombre de *principio de invariancia*).

Entonces, como consecuencia tenemos que en la inclusión de (3.28) podemos reemplazar el conjunto que allá figura por el conjunto invariante maximal al cual contiene, o sea, la unión de todas las órbitas con la propiedad de que \dot{v} se anule en ellas idénticamente. Una manera de escribir estas inclusiones más estrictas es la siguiente:

$$(\forall x) \Lambda^\pm(x) \subset \bigcup \{\gamma(x') \mid \dot{v}^{-1}(\mathbf{0}) \supset \gamma(x')\}. \quad (3.29)$$

Resumimos esto en el siguiente

COROLARIO 3.2.15. [*Principio de invariancia de Lasalle*]. *Bajo las mismas hipótesis del Teorema 3.2.14, valen las inclusiones (3.29).*

Antes de entrar en la demostración del Teorema 3.2.14, presentamos un ejemplo sencillo que subraya la importancia del principio de invariancia.

EJEMPLO 3.2.16. (Oscilador lineal amortiguado). Consideramos la ecuación

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = 0,$$

o equivalentemente el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - y. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Para determinar los conjuntos límites, usamos como función de LaSalle

$$v(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

(que es la más natural), obteniendo como derivada de Lie

$$\dot{v} = x\dot{x} + y\dot{y} = -y^2,$$

la cual es menor o igual a cero (dando, incidentalmente con v como función de Lyapunov, la estabilidad del origen). Así que se cumplen las hipótesis del Teorema 3.2.14. La derivada \dot{v} se anula en $\{y = 0\}$, así que según el Teorema 3.2.14 todos los conjuntos límites están ubicados en esta recta. Más allá de esto, el Teorema 3.2.14 no da información.

Si por otra parte, tomamos en cuenta (3.29), encontramos que el único conjunto invariante contenido en la recta $y = 0$ es el origen, pues, para que una órbita esté contenida en ella, tiene que anularse en ella la derivada idénticamente la derivada \dot{y}^9 , lo cual da la condición $\dot{y} = -x - y = 0$, o sea $y = -x$; siendo $y = 0$, sigue $(x, y) = (0, 0)$. Tenemos el resultado que el único punto límite posible es el origen. De hecho tenemos:

$$(\forall p = (x, y)) \quad \Lambda^+(p) = \mathbf{0}, \quad \Lambda^-(p) = \emptyset.$$

La primera parte es consecuencia del Teorema 2.4.2, parte f), siendo todas las órbitas acotadas debido a $\dot{v} \leq 0$; por ende $\Lambda^+(p) \neq \emptyset$. La segunda parte se desprende de la estabilidad del origen aplicando, por ejemplo, el Teorema 3.1.14 [condición de Zubov].

Demostración del Teorema. El teorema es de hecho un corolario de un teorema más general y del hecho de que los puntos límites son no errantes (Teorema 3.2.13). Por esto formulamos el teorema siguiente, más general. \square

TEOREMA 3.2.17. *Bajo las hipótesis del Teorema 3.2.14, v es constante a lo largo de cualquier órbita no errante. [Según el Ejercicio 3.7, ser no errante es propiedad de la órbita, no del punto individual].*

Demostración. Esta será un consecuencia del siguiente lema.

LEMA 3.2.18. *Si v es continua y no creciente a lo largo de las órbitas, vale lo siguiente:*

$$y \in D^+(x) \Rightarrow v(y) \leq v(x). \quad (3.31)$$

⁹En general, en un sistema con unicidad, para que un hiperplano de coordenada, $\{x_i = 0\}$, contenga un conjunto invariante A , es necesario y suficiente, que $\dot{x}_i = 0$ en cada punto de A . De hecho, la necesidad es obvia; la suficiencia es consecuencia inmediata de la unicidad ($\dot{x}_i = 0$ tiene solución $x_i = 0$).

Demostración. Sean (x_n) , (t_n) tales que $x_n \rightarrow x$, $y_n := x_n t_n \rightarrow y$, $t_n \geq 0$. Entonces $(\forall n) v(y_n) \leq v(x_n)$ por la monotonía, y $v(x_n) \rightarrow v(x)$, $v(y_n) \leq v(y)$ por la continuidad. La desigualdad se extiende a los límites, así que vale la desigualdad por probar. [La argumentación se puede resumir en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} v(y_n) & \leq & v(x_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ v(y) & \leq & v(x) \end{array}$$

]. □

De (3.31) se desprende inmediatamente el Teorema 3.2.17. De hecho, (3.31) obviamente vale para $J^+(x)$ en lugar de $D^+(x)$, siendo este un subconjunto de aquel. Por otra parte, si x es no errante, $x \in J^+(x)$, por definición. Ahora, sea $y = xt$, $t > 0$. Entonces,

$$v(x) \leq v(y) \leq v(x),$$

la primera desigualdad por el Lema 3.2.18, siendo $J^+(y) = J^+(x)$, por ende $x \in J^+(y)$, y la segunda por la monotonía. Resulta $v(y) = v(x)$, para cualquier $y \in J^+(x)$; si $y \in J^-(x)$, y también es no errante, y se puede repetir el mismo argumento intercambiando x y y .

Ahora el Teorema 3.2.14 sigue de los Teoremas 3.2.13 y 3.2.17.

El Teorema 3.2.17 tiene un alcance más grande que el 3.2.14, porque *no todos los puntos no errantes son puntos límites*, como prueba el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3.2.19. Consideremos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{r} &= 0, \\ \dot{y} &= (\theta - \pi)^2 + (r - 1)^2. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Debido a la primera ecuación, todas las órbitas están ubicadas en circunferencias $r = \text{constante}$. Debido a la segunda ecuación, el único punto crítico fuera del origen es $\theta = \pi$, $r = 1$, lo denotamos por p^* . Así que todas las órbitas son periódicas salvo la órbita no constante en $r = 1$ que se adhiere al punto crítico en ambos sentidos. La denotamos por γ_1 , y elegimos un punto q en ella. Resulta q no errante: sean q_n puntos en órbitas distintas de γ_1 que se acumulan en q . (Ver Figura 3.17).

Los q_n son periódicos, y sus respectivos períodos primitivos, τ_n , tienden a infinito (pues en el caso contrario podríamos suponer $\tau_n \rightarrow \tau$, y por continuidad resultaría $q\tau = \lim q_n \tau_n = \lim q_n = q$), y q sería también periódico, lo cual no es el caso). Así que tenemos:

$$q_n \rightarrow q, \quad q_n \tau_n \rightarrow q, \quad \tau_n \rightarrow \infty,$$

de donde $q \in J^+(q)$, o sea, q es no errante.

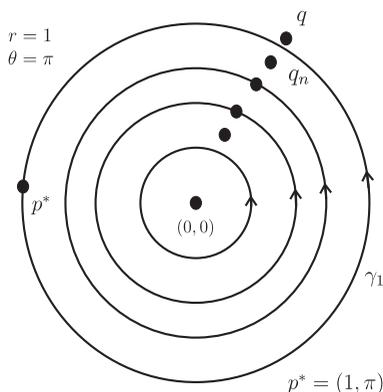


Figura 3.17

Por otra parte, q no es punto límite de ninguna órbita (pues todas las órbitas distintas de γ_1 coinciden con sus conjuntos límites por ser periódicos, y $\Lambda^\pm(\gamma_1) = \{p^*\}$).

En el caso de este sistema todas las funciones continuas no crecientes son constantes a lo largo de todas las órbitas, porque todas son no errantes. En este caso el Teorema 3.2.17 se trivializa. Un ejemplo donde esto no es el caso se obtiene mediante la siguiente modificación: Las circunferencias $r = r_n = (1 - \frac{1}{n})$ son ciclos (órbitas periódicas), conectadas entre sí por órbitas espirales. Sean γ_n estos ciclos, y la circunferencia $r = 1$ conste de un punto crítico p^* y una otra órbita γ_0 .

Tomando como función de LaSalle $v(r, \theta) = r$, resulta $\dot{r} = 0$ exactamente en $r = 0$, $r = r_n$ y $r = 1$, los cuales forman exactamente las órbitas no errantes (todas menos γ_0 periódicas).

El Teorema 3.2.17 se puede extender aún más, a puntos *no errantes superiores*, contenidos en sus conjuntos límites prolongacionales iterados finita o transfinitamente. Damos aquí un ejemplo sencillo donde todas las órbitas son no errantes de primero y de segundo orden:

EJEMPLO 3.2.20. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{r} &= 0, \\ \dot{\theta} &= (\theta - \pi)^2. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Los puntos con $\theta = \pi$, y sólo estos (incluyendo el origen) son no errantes. Los demás son *no errantes de segundo orden*, o sea,

$$p \in J_2^+(p) := J^+(J^+(p)).$$

($J_1^+ := J^+$), y no de primer orden. Ver Figura 3.18.

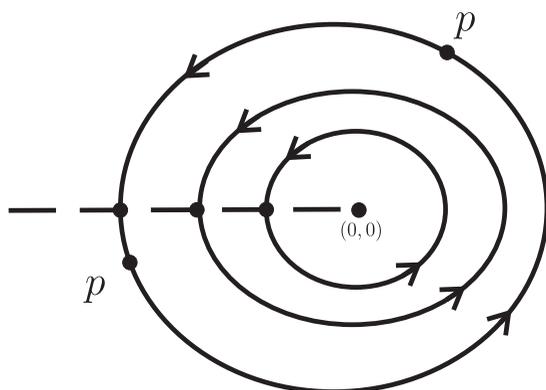


Figura 3.18

EJERCICIO 3.8. Probar esto en detalle.

EJERCICIO 3.9. Construir un ejemplo parecido donde los puntos no críticos son errantes de orden tres.

Nota terminológica y bibliográfica. En la literatura [Bhathia-Zsego obra citada, capítulo IV] los puntos no errantes de algún orden (no necesariamente finito) se llaman *r-currentes en el sentido generalizado*. (Allá no se trata al teorema de LaSalle.)

EJEMPLO 3.2.21. Dado el sistema en el plano,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + xy, \\ \dot{y} &= y + x^2y.\end{aligned}\tag{3.34}$$

se trata de localizar los puntos límites.

Solución. Usamos como función de LaSalle la variable y : $v(x, y) = y$, porque su derivada, $\dot{v} = y(1 + x^2)$ cambia de signo sólo una vez y lo hace en un conjunto invariante: $y = 0$. Por eso dividimos el plano en dos regiones invariantes:

$$C^+ := \{y \geq 0\}, \quad C^- = \{y \leq 0\}.$$

En cada una, \dot{v} es de signo fijo, y la restricción del sistema a cada región puede considerarse como un sistema dinámico independiente. Entonces los conjuntos límites pueden estar, según el Teorema 3.2.14, solamente en la recta $y = 0$, donde \dot{v} se anula. El Corolario 3.2.15 (Principio de invariancia) en este caso no da ninguna información adicional porque $\{y = 0\}$ es invariante.

En cambio lo que sí da información adicional es el hecho de que los conjuntos límites no son errantes. De los puntos de $\{y = 0\}$, el origen

es el punto crítico, por ende, no errante. Los demás son errantes como se ve usando como segunda función la variable x :

$$v_2(x, y) = x,$$

$$\dot{v}_2 = x(1 + x).$$

Esta derivada tiene un signo fijo en cada uno de los conjuntos negativamente invariantes $\{x \geq 0, y \geq -1\}$ y se anula únicamente en $x = 0$ y $y = -1$. Por lo tanto $\{y = 0, x \neq 0\}$ consta de puntos errantes.

Así resulta que el origen es un único punto límite. (También el único punto crítico.) Es el punto límite negativo de todas las demás órbitas, y punto límite positivo sólo de si mismo (*repulsor global*). Esto se ve usando la función $v = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ la cual da $\dot{v} = x\dot{x} + y\dot{y} = x^2(x + y) + y^2(1 + x^2) \geq 0$ en la vecindad $\{y \geq -1\}$ del origen. Esto significa que cerca del origen las órbitas se alejan de el.

Para asegurar fehacientemente que el origen es deveras un repulsor global hay que probar que todas las semiórbitas negativas son acotadas. De hecho las únicas que podrían alejarse serían las de la región $\{y < -1\}$; ya que para ellas $|y|$ es decreciente con $t \rightarrow -\infty$, tendría que ser

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| = \left| \frac{y}{1+y} \right| \left| \frac{1+x^2}{x} \right| \rightarrow 0.$$

En esta expresión, y no tiende a cero, y $|1+y|$ es acotado, mientras que el segundo factor tiende a infinito. En consecuencia la condición es imposible y por lo tanto resulta que todas las órbitas tienden al origen para $t \rightarrow -\infty$.

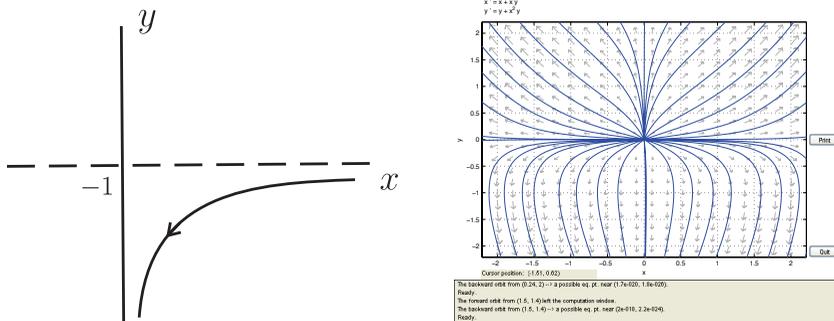


Figura 3.19

NOTA 3. El Teorema 3.2.17 sigue válido si se suponen las hipótesis en una vecindad semiinvariante de la órbita a la cual se aplica, porque

los arcos $x_n[0, t_n]$ que figuran en la relación $x \in J^+(x)$, si salen de la vecindad, ya no reentran.

EJERCICIO 3.10. Determine, de manera parecida, los conjuntos límites del sistema

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1 - r), \\ \dot{\theta} &= \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

3.2.3. Estabilidad Asintótica.

DEFINICIÓN 3.2.22. Un conjunto compacto invariante se dice *atractor* si existe una vecindad U de M tal que

$$(\forall x \in U) \lim_{t \rightarrow +\infty} d(xt, M) = 0.$$

El conjunto de puntos con esta propiedad se llama *región de atracción o cuenca del atractor* M . Esta la denotamos usualmente por $A(M)$. Si esta es todo el espacio, llamamos *M atractor global*.

Otra definición que se usa es la siguiente:

DEFINICIÓN 3.2.23. Sea A una vecindad de M (compacto, invariante). M es *atractor con cuenca* $A(M)$ si $A = \{x \mid \emptyset \neq \Lambda^+(x) \subset M\}$.

NOTA 4. La condición $\Lambda^+(x) \neq \emptyset$ es necesaria:

Considérese la ecuación $\dot{x} = x$. Aquí $\Lambda^+(0) = 0$; para $x \neq 0$, $\Lambda^+(x) = \emptyset$. Se cumple $\Lambda^+(x) \subset \{0\}$ para todo x , pero el origen no es atractor sino repulsor.

Las definiciones 3.2.22 y 3.2.23 son equivalentes si el espacio es euclideo.

Demostración. Ejercicio (un poco más exigente.)

En espacios métricos en general la definición 3.2.23 no implica la otra y por eso es inadecuada.

EJEMPLO 3.2.24. Sea X el subespacio de \mathbb{R}^2 obtenido quitando de este el disco $r^2 = x^2 + y^2 \leq 1$ (ver Figura 3.20),

salvo el punto $p = (0, 1)$, que se supone punto crítico. Las demás órbitas sean espirales que tienden a $r = 1$. $\{p\}$ es un atractor en el sentido de la definición 3.2.23, pero no en el de la definición 3.2.25.

DEFINICIÓN 3.2.25. El conjunto compacto invariante M es (*globalmente*) *asintóticamente estable* si es estable y atractor(global).

Las dos propiedades que constituyen la estabilidad asintótica, es decir *la estabilidad y la atracción* o (propiedad de atractor) *son independientes entre sí*.

Por ejemplo, el origen del sistema $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$ (centro) es estable pero no atractor.

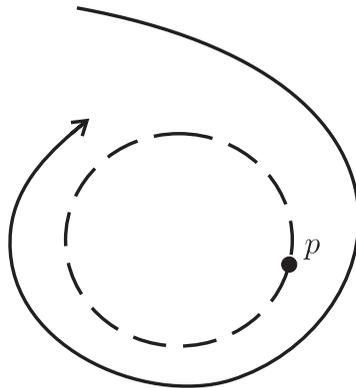


Figura 3.20

Por otra parte, el sistema que figura en el Ejercicio 3.10 es un ejemplo de un *atractor inestable*. { Más ejemplos se encuentran en [B-S], obra citada, Chapt.V, sect.1 }.

TEOREMA 3.2.26. *Para que M sea un conjunto compacto invariante sea asintóticamente estable y su cuenca de atracción contenga una vecindad B de M , las siguientes condiciones son suficientes:*

- i) B es compacta y positivamente invariante.
- ii) Existe una función $v : B \rightarrow \mathbb{R}^+$, continua, estrictamente decreciente a lo largo de las órbitas en $B \setminus M$, $t > 0$, entonces $v(xt) < v(x)$.
- iii) $v^-(0) = M$.

Demostración. a) M es estable porque se cumplen las condiciones del Teorema 3.1.6. b) Para probar que M es atractor, supongamos lo contrario. Entonces existe un punto $x \in B$ y una sucesión (t_n) tal que $t_n \rightarrow +\infty$, pero $xt_n \not\rightarrow M$. Debido a la compacidad de B , podemos suponer que (xt_n) sea convergente, por ejemplo $xt_n \rightarrow y \notin M$. Por la invariancia positiva de B vale $y \in B$. Según la Nota 3, siendo y punto límite, por ende no errante, podemos aplicar el Teorema 3.2.17 que nos dice que v es constante a lo largo de $\gamma(y)$. Esto contradice la condición ii). □

COROLARIO 3.2.27 (Condición para la estabilidad asintótica local.). *Si B es una vecindad de M cualquiera, y si se cumplen las condiciones ii) y iii) del Teorema 3.2.17, M es asintóticamente estable. Aquí se supone que el espacio sea localmente compacto.*

Demostración. La estabilidad sigue como en el Teorema 3.2.17. Observamos que existe una constante $\lambda > 0$ tal que $B' := \{x \mid v(x) \leq \lambda\}$ es una vecindad de M y $B' \subset B$. De hecho, siendo M compacto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(M, \epsilon) \subset B$. Entonces por la continuidad de v y la condición iii), usando otra vez la compacidad de M , obtenemos un $\lambda > 0$ tal que

$$B' \subset B(M, \epsilon) \subset B.$$

Que B' es una vecindad de M es obvio por iii). Su invariancia positiva es consecuencia inmediata de ii); es cerrado por continuidad de v , y compacto para λ pequeño si el espacio es localmente compacto. Se aplica el Teorema a B' . \square

EJEMPLO 3.2.28. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + x^2, \\ \dot{y} &= -y - xy.\end{aligned}\tag{3.36}$$

Solución. Usamos la función de Lyapunov $v = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Esta da:

$$\dot{v} = x\dot{x} + y\dot{y} = -x^2(1 - x^2) - y^2(1 + x).$$

Esta expresión es negativa para $(x, y) \neq (0, 0)$ si las dos expresiones entre paréntesis son positivas, i.e., $|x| < 1$. Elegimos como región B la siguiente:

$$B_{\epsilon, m} := \{(x, y) \mid |x| \leq 1 - \epsilon, |y| \leq m\}, \quad (\epsilon > 0, m > 0).$$

Esta satisface las condiciones del Teorema 3.2.26 para cualquier $\epsilon \in (0, 1)$, $m > 0$, así que la cuenca del origen contiene todos estos conjuntos, por ende la franja $|x| < 1$.

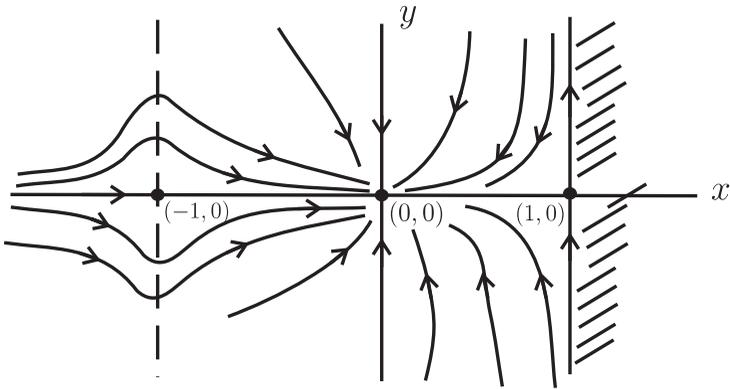
No puede extenderse hasta $x = 1$, porque $(1, 0)$ es un punto crítico, y la recta $x = 1$ es invariante (en ella vale $\dot{x} = 0$). Averiguamos si la cuenca se puede extender más allá de $x = -1$.

Observamos que $\dot{x} = -x(1 - x) > 0$ para $x \leq -1$; por eso allá no puede haber puntos límites (x es una función de LaSalle.) Las órbitas con puntos iniciales en $\{x \leq -1\}$ tampoco se pueden escapar al infinito¹⁰. Por lo tanto, estas órbitas necesariamente cruzan la recta $x = -1$ y son atraídas hacia el origen. Tenemos como resultado:

El origen es asintóticamente estable¹¹ y su cuenca es el plano $x < 1$. (Ver Figura 3.21).

¹⁰Una estimación elemental muestra que en $\{x < -1\}$ vale $y(t) \leq Cx(t)$ para cierta constante C , así que y tiene variación finita en intervalos finitos.

¹¹Que lo es localmente es una consecuencia del hecho de que el sistema reducido a la parte lineal tiene autovalores negativos.

**Figura 3.21**

Teoría Topológica de Ważewski.

La teoría topológica de Ważewski nos permite establecer la existencia de separatrices y sirve en muchas partes de la teoría cualitativa.

4.1. Sistemas autónomos.

Presentamos la teoría en el contexto de un sistema dinámico definido por una ecuación diferencial, suponemos que esta sea de la forma

$$\dot{x} = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n), \tag{4.1}$$

con el origen como punto crítico, o sea, $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, y que satisfaga en una vecindad de $\mathbf{0}$ a una condición de Lipschitz, para representar un sistema dinámico, por lo menos localmente.

DEFINICIÓN 4.1.1. Dada una región $G \subset X$ (espacio fase) y su frontera, ∂G . Un punto $q \in \partial G$ es el *consecuente* de $p \in G$ si $q = p\tau$ ($\tau > 0$) y $p[0, \tau] \subset G$ [q es el primer punto en el cual $\gamma^+(p)$ alcanza la frontera ∂G .]

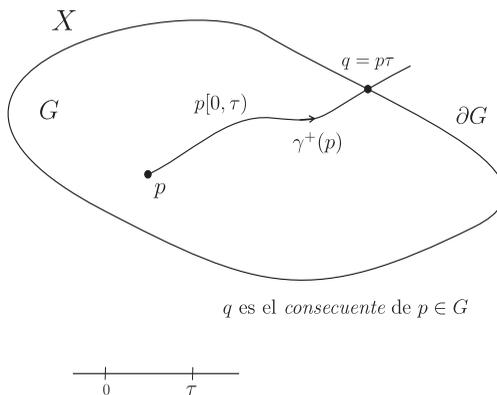


Figura 4.1. Ilustración de la Definición 4.1.1

Sobre la notación: pt es la notación abreviada para $x(p, t)$, la solución [de un sistema autónomo $\dot{x} = f(x)$] con valor inicial p : $x(p, 0) = p$.

PROPOSICIÓN 4.1.2. Si $p \in G$ y $\gamma^+(p) \not\subset G$, existe un consecuente único q de p .

Demostración. Si $\gamma^+(p) \not\subset G$, existe un $t > 0$ tal que $pt \notin G$. Los conjuntos ∂G y $p[0, t]$ son ambos cerrados (el segundo por continuidad del flujo), por lo tanto, $\partial G \cap p[0, t] \neq \emptyset$ (por ser $p \in G$, $pt \notin G$ y $p[0, t]$ conexo) y también cerrado.

Sea $T = \{\tau \in [0, t] \mid p\tau \in \partial G\}$, entonces T es cerrado, pues en caso contrario, existiría una sucesión $\{t_n\} \subset T$ tal que $t_n \rightarrow t_0$ y $t_0 \notin T$; por continuidad del flujo, $pt_n \rightarrow pt_0 \notin \partial G$, mientras que $pt_n \in \partial G$ lo cual no es posible siendo ∂G cerrado y, por ende posee un primer elemento, que llamamos τ_p . Entonces $p\tau_p$ es el consecuente. Ver la Figura 4.2. \square

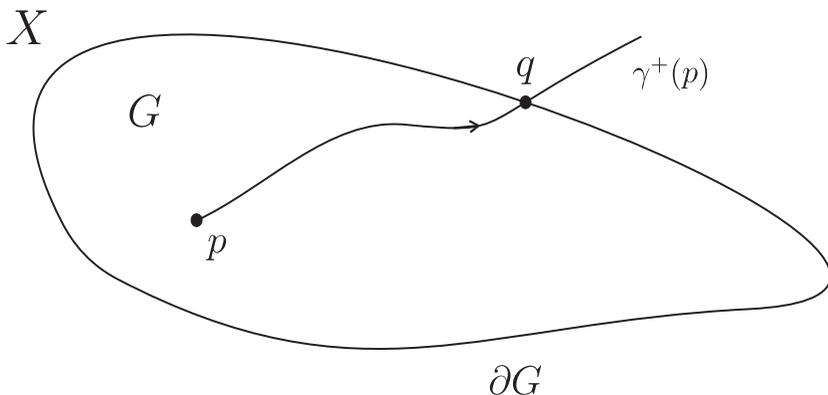


Figura 4.2. Ilustración de la Proposición 4.1.2

Análogamente se define el antecedente:

DEFINICIÓN 4.1.3. Dada una región $G \subset X$ y su frontera, ∂G . Un punto $q \in \partial G$ es el *antecedente* de $p \in G$ si existe $\tau < 0$ tal que $q = p\tau$ y $p[\tau, 0] \subset G$ [q es el último punto en el cual $\gamma^+(p)$ abandona la frontera ∂G].

Bosquejamos el significado de la Definición 4.1.3 mediante la Figura 4.3.

El *consecuente* de p lo denotamos con $C^+(p)$ (ver la Figura 4.4) y, el *antecedente* de p con $C^-(p)$.

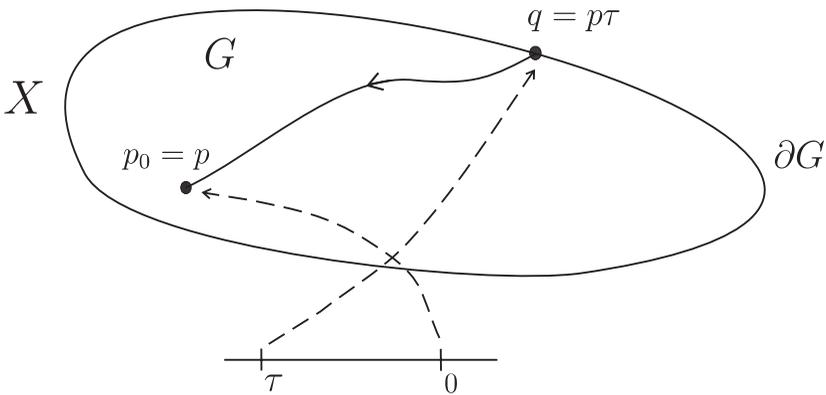


Figura 4.3. Ilustración de la definición de *antecedente*.

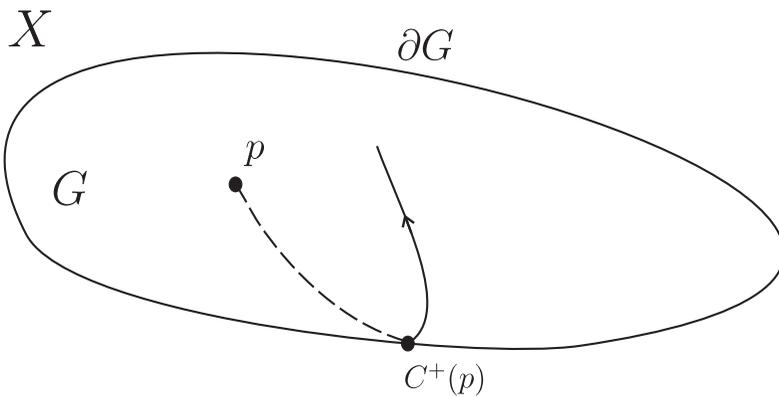


Figura 4.4. Ilustración de la definición de *cosecuente* de un punto.

El tiempo para alcanzar el consecuente lo denotamos por τ^+ y, para alcanzar el antecedente con τ^- . Entonces

$$p\tau^\pm = C^\pm(p) \quad [\tau^+ > 0, \tau^- < 0].$$

Los subconjuntos de G para los cuales τ^\pm está definido los denotamos por Σ^\pm . Es decir, $\Sigma^\pm = \{p \in G \mid \exists[\tau^+ > 0, \tau^- < 0] \text{ y } p\tau^\pm = C^\pm(p)\}$. Σ^\pm es el conjunto de puntos de G cuyas órbitas alcanzan la frontera en sentido positivo (negativo) se llaman las *sombras*.

Entonces τ^\pm son funciones de $\Sigma^\pm \rightarrow \mathbb{R}^\pm$, y C^\pm son funciones de $\Sigma^\pm \rightarrow \partial G$.

Tenemos las aplicaciones:

$$\tau^\pm : \Sigma^\pm \rightarrow \mathbb{R}^\pm,$$

$$C^\pm : \Sigma^\pm \rightarrow \partial G,$$

(con la exclusión del 0 .)

Además denotamos : $\partial G \supset S = C^+(\Sigma^+)$, (ver Figura 4.5) $\partial G \supset \mathcal{E} = C^-(\Sigma^-)$, (\mathcal{E}, S son conjuntos para los cuales las órbitas alcanzan la frontera de G , en sentido positivo (negativo).) Llamamos al conjunto S *conjunto de salida (egreso)*, integrado por los puntos de salida (egreso). Al conjunto \mathcal{E} *conjunto de entrada (ingreso)* integrado por los puntos de entrada (ingreso).

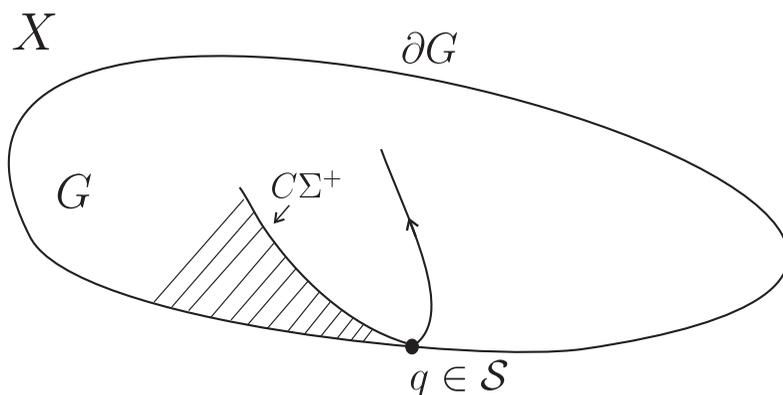


Figura 4.5. Ilustración del conjunto $C^+(\Sigma^+)$.

El punto $q \in S$ es de *salida estricta* (Ver Figura 4.6) si existe $\epsilon > 0$ tal que

$$qt \in \begin{cases} G, & \text{para } -\epsilon \leq t < 0, \\ \partial G, & \text{para } t = 0, \\ \overline{CG}, & \text{para } 0 < t \leq \epsilon. \end{cases} \quad (4.2)$$

Ejemplos de salida no estricta.

Ver la Figura 4.7.

Los puntos de *entrada (ingreso) estricta* se definen análogamente.

El punto $q \in \mathcal{E}$ es un punto de *ingreso estricto* si existe $\epsilon > 0$ tal que

$$qt \in \begin{cases} \overline{CG}, & \text{para } -\epsilon \leq t < 0, \\ \partial G, & \text{para } t = 0, \\ G, & \text{para } 0 < t \leq \epsilon. \end{cases} \quad (4.3)$$

(Ver la Figura 4.8)

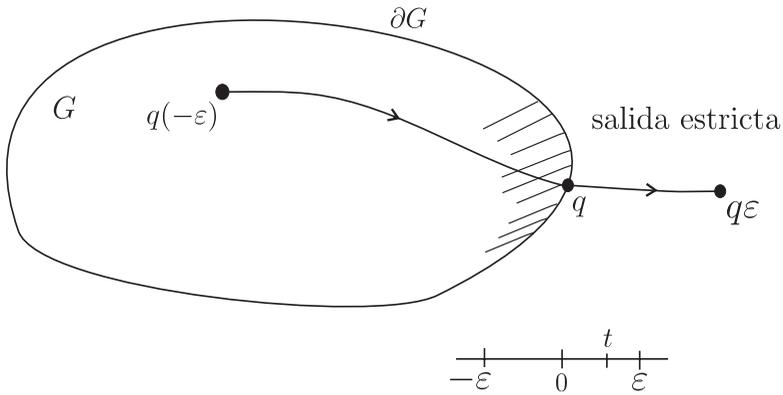


Figura 4.6. Ilustración de la salida estricta.

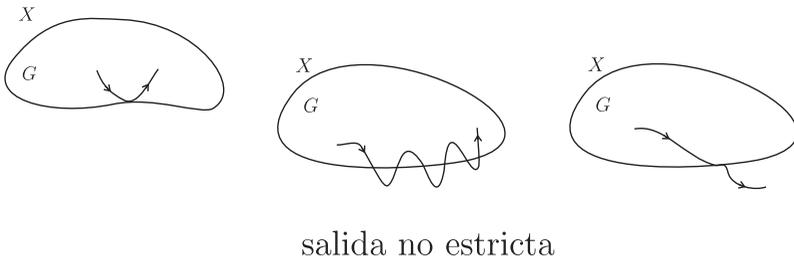


Figura 4.7. Salida no estricta, en la figura de enmedio, los puntos de salida en $\gamma^+(q)$ se acumulan en q .

Notación:

$$\mathcal{S}^* = \{\text{puntos de entrada estricta}\} = \{q \in \partial G \mid \text{cumple (4.2)}\}$$

y

$$\mathcal{E}^* = \{\text{puntos de salida estricta}\} = \{q \in \partial G \mid \text{cumple (4.3)}\}.$$

Los conjuntos Σ_*^\pm son los subconjuntos de Σ^\pm donde τ^\pm toma valores en $\mathcal{S}^*/\mathcal{E}^*$, es decir

$$\Sigma_*^+ = \{p \in G \mid \tau^+(p) \in \mathcal{S}^*\},$$

y

$$\Sigma_*^- = \{p \in G \mid \tau^-(p) \in \mathcal{E}^*\}.$$

Ver la Figura 4.9.

LEMA 4.1.4. *Las funciones*

$$\tau^\pm : \Sigma_*^\pm \rightarrow \mathbb{R}^\pm$$

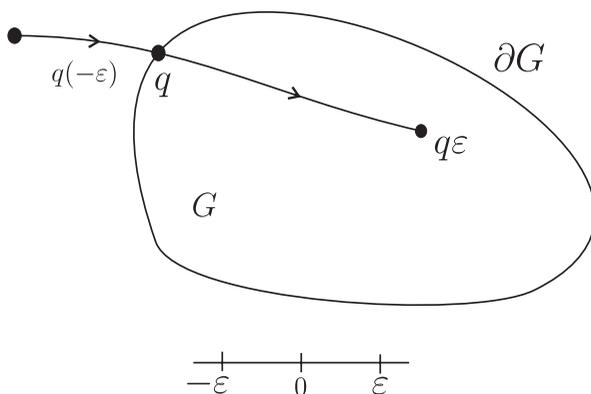


Figura 4.8. Ilustración de la definición de ingreso estricto.

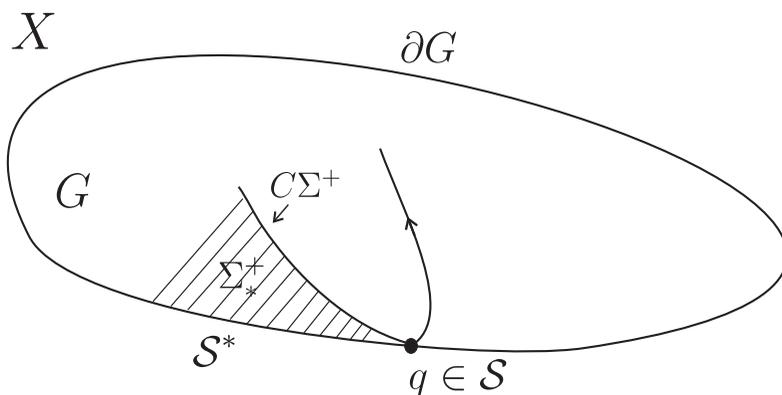


Figura 4.9. Ilustración del conjunto de puntos de salida estricta.

son continuas.

Demostración. Lo demostramos para τ^+ . Sean $p_n, p \in \Sigma_*^\pm$, $p_n \rightarrow p$. Entonces hay que demostrar que $\tau^+(p_n) \rightarrow \tau^+(p)$. Lo hacemos en dos pasos

- (1) $\overline{\lim} \tau^+(p_n) \leq \tau^+(p)$;
- (2) $\underline{\lim} \tau^+(p_n) \geq \tau^+(p)$.

Para la demostración de (1). Supóngase lo contrario. Entonces

$$\exists \{p'_n\} \subset \{p_n\} \text{ tal que } \exists \lim \tau^+(p'_n) = \tau^* > \tau^+(p).$$

Elegimos $\epsilon > 0$ tal que

$$\tau^+(p) + 2\epsilon < \tau^*, \text{ y} \tag{4.4}$$

$$p[\tau^*(p) + \epsilon] \notin \overline{G}. \tag{4.5}$$

(El último es posible por ser $p\tau^+(p) = C^+(p) \in \mathcal{S}^*$ por hipótesis.)

Entonces tenemos (por ser $\mathcal{C}\overline{G}$ abierto y pt continuo en p):

(Ver la Figura 4.10.)

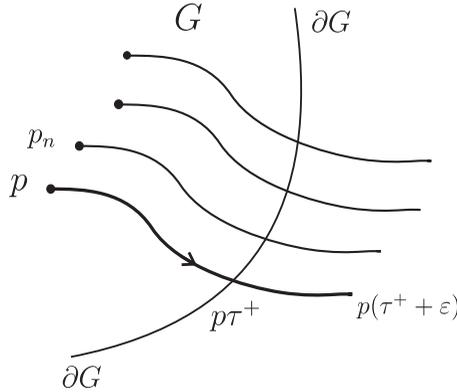


Figura 4.10. Ilustración de la continuidad de τ^+ en Σ_*^+ .

$p'_n(\tau^+(p) + \epsilon) \notin \overline{G}$ para n grande. Además: $\tau^+(p) + \epsilon < \tau^* - \epsilon < \tau^+(p'_n)$ [por (i)] para n grande [por definición de τ^*], los que juntos significarían que p'_n sale de G antes de $\tau^+(p'_n)$, contrario a la definición de este. Lo cual prueba (4.1.4).

Demostración para el caso (2), suponiendo lo contrario existiría una subsucesión $(p'_n) \subset (p_n)$ tal que $\tau^+(p'_n) \rightarrow \tau^* < \tau^+(p)$. Entonces $p\tau^* \in G$ por definición de τ^+ y entonces (por continuidad, ya que $p' \rightarrow p$ y $\tau^+(p'_n) \rightarrow \tau^*$): $p'_n\tau^+(p'_n) \in G$ para n grande; contrario a la definición de $\tau^+(p'_n)$. Esto prueba (4.5). \square

OBSERVACIÓN 8. En general τ^\pm no son continuas en Σ^\pm . (Ver la Figura 4.11.)

DEFINICIÓN 4.1.5. Si A es un conjunto en un espacio topológico X y, $B \subset A$, entonces la aplicación

$$\rho : A \rightarrow B$$

se llama una retracción, si ρ es continuo y su restricción a B es la identidad, es decir,

$$\forall p \in B, \rho(p) = p.$$

[Borsuk].

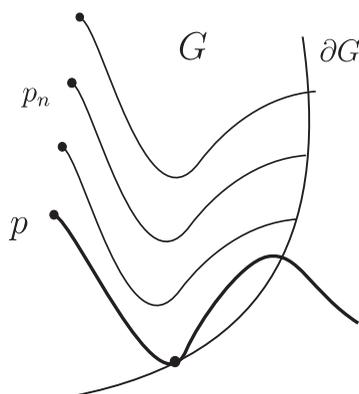


Figura 4.11. Ilustración de que τ^+ no necesariamente es continua en Σ^+ .

A la imagen de un conjunto A bajo la retracción se llama *retracto*.

EJEMPLO 4.1.6. Sea $X = \mathbb{R}^n$, sea $A = \{x \in X \mid \|x\| \leq R\}$. Entonces A es un retracto de X . Una retracción está dada por

$$\rho(x) = \begin{cases} x, & \text{si } \|x\| \leq R, \\ \frac{Rx}{\|x\|}, & \text{si } \|x\| > R. \end{cases} \quad (4.6)$$

Ahora extendemos Σ^\pm y Σ_*^\pm a la frontera de G para que incluyan $\mathcal{S}, \mathcal{S}^*, \mathcal{E}, \mathcal{E}^*$, respectivamente y, extendemos C^\pm a \mathcal{S} (\mathcal{E}) poniendo (ya que $p'_n \rightarrow p$ y $\tau^+(p'_n) \rightarrow \tau^*$)

$$C^\pm(q) = q \text{ para } q \in \mathcal{S} \text{ (} q \in \mathcal{E}\text{)}.$$

COROLARIO 4.1.7. Las aplicaciones

$$C^+ : \Sigma_*^+ \rightarrow \mathcal{S}^*,$$

y

$$C^- : \Sigma_*^- \rightarrow \mathcal{E}^*,$$

son retracciones (y por ende \mathcal{S}^* y \mathcal{E}^* son retractos de Σ_*^\pm .)

La demostración se sigue de que, $C^\pm(p) = p\tau^\pm(p)$, τ^\pm y pt son ambas continuas [el segundo en las variables (p,t)]¹ y en $\mathcal{S}^*(\mathcal{E}^*)$, $C^+(C^-)$ se reducen a la identidad. \square

TEOREMA 4.1.8. (Teorema de Wazewski) Si $\mathcal{S} = \mathcal{S}^*$ (Todos los puntos de salida son estrictos), y si \mathcal{S} no es un retracto de G , entonces G contiene

¹y por ende $p\tau^\pm(p)$ son continuas con respecto a p .

una semiórbita positiva. Análogamente, si $\mathcal{E} = \mathcal{E}^*$ y \mathcal{E} no es un retracto de G , entonces G contiene una semiórbita negativa.

Demostración. Si G no contiene semiórbitas positivas, esto es decir que todas las órbitas salen en sentido positivo. Entonces tendríamos $G = \Sigma^+ = \Sigma_*^+$ (pues $\mathcal{S} = \mathcal{S}_*$ implica que $\Sigma^+ = \Sigma_*^+$) y por el Corolario 4.1.7 \mathcal{S} tendría que ser un retrato de G , donde G es una región. \square

Usualmente usamos el Teorema 4.1.8 de la manera siguiente.

COROLARIO 4.1.9. Si $\mathcal{S} = \mathcal{S}^*$, y este conjunto es diconexo, entonces no todas las órbitas salen.

Demostración. Si \mathcal{S} no es conexo, existe una descomposición $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, con $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$, \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 abiertos relativos a \mathcal{S} . Si todas las órbitas salieran, tendríamos

$$G = \Sigma^+ = \Sigma^+ \mathcal{S}_1 \cup \Sigma^+ \mathcal{S}_2 : \Sigma^+ \mathcal{S}_1 \cap \Sigma^+ \mathcal{S}_2 \neq \emptyset$$

$$G = \Sigma^+ = \Sigma^+ \mathcal{S}_1^* \cup \Sigma^+ \mathcal{S}_2^* : \Sigma^+ \mathcal{S}_1^* \cap \Sigma^+ \mathcal{S}_2^* \neq \emptyset$$

donde $\Sigma^+ \mathcal{S}_i = \{p \in G \mid C^+(p) \in \mathcal{S}_i\}$, para $i = 1, 2$, y también para las respectivas sombras de \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 , $\Sigma^+ \mathcal{S}_i^* = \{p \in G \mid C^+(p) \in \mathcal{S}_i^*\}$, para $i = 1, 2$.

(pues si $p \in \Sigma^+$, $\gamma^+(p)$ sale por \mathcal{S}_1 o por \mathcal{S}_2 y nada más por uno de los dos, ya que son ajenos y todo punto tiene un consecuente único). Además $\Sigma^+ \mathcal{S}_1$ y $\Sigma^+ \mathcal{S}_2$ son abiertos en Σ^+ (como imágenes inversas de abiertos bajo la función continua C^+). Tenemos una descomposición de $G = \Sigma^+$ en conjuntos abiertos y ajenos, lo que implicaría que G es diconexo; entonces este no sería región. \square

4.2. Aplicación a sistemas en el plano.

4.2.1. Separatriz en un punto crítico. Dado el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y). \end{aligned} \quad (4.7)$$

con condiciones usuales sobre f y g . Tenemos el siguiente teorema

TEOREMA 4.2.1. Sea G una región acotada, simplemente conexa en el plano y su frontera, ∂G homeomorfa a un círculo.

Supóngase que la frontera contiene un solo punto crítico, p , y que G no contiene puntos límite positivos de semiórbitas en G . Además todos los puntos de egreso son estrictos y el conjunto de egreso, \mathcal{S} , no es vacío y es diconexo. Entonces existe una semiórbita positiva en G que tiende a p , esto es, $\Lambda^+(\bar{G}) = \{p\}$.

Demostración. Por el Corolario 4.1.9, existe en G una semiórbita positiva, γ^+ . Siendo \overline{G} compacto, γ^+ posee cuando menos un punto límite en \overline{G} , ya que los puntos límites en G están excluidos, existe uno en ∂G . El resto del Teorema sigue si podemos probar que ningún punto de ∂G , salvo p , es punto límite. Ya que $L^+(\gamma^+)$ es invariante y cerrado, no puede ser toda ∂G , pues ∂G contiene puntos de salida estrictos así que ∂G no es invariante.

Ahora supóngase que $\Lambda^+(\gamma^+)$ contenga una órbita no crítica γ_1 . Los conjuntos límites (positivos y negativos) de ésta se reducirán a un punto crítico cada uno [pues $\gamma_1 \subset \partial G$ y esto es homeomorfo a un círculo. en este se puede introducir una variable cíclica, θ , que sería obviamente monótonamente en γ_1 ; de aquí la existencia de puntos límites únicos.] (Ver la siguiente Figura 4.12.)

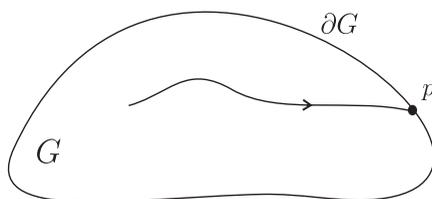


Figura 4.12. Ilustración del Teorema 4.2.1.

Pero p es por hipótesis el único punto crítico, es decir que $\gamma_1 \rightarrow p$ en ambos sentidos, y esto está excluido por ser $\Lambda^+(\gamma^+) \subsetneq \partial G$. Se queda como única posibilidad $\Lambda^+(\gamma^+) = \{p\}$. Esto prueba el Teorema. \square

OBSERVACIÓN 9. Nótese que hay regiones simplemente conexas, acotadas cuya frontera no es homeomorfa a S^1 , ver la Figura 4.13

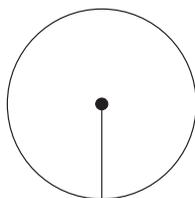


Figura 4.13. Región simplemente conexa, acotada cuya frontera no es homeomorfa a S^1 .

OBSERVACIÓN 10. Usando la teoría de Poincaré-Bendixon, se puede debilitar la hipótesis de puntos críticos en G . Pues de aquella teoría se

sabe que todo conjunto límite en el plano sin puntos críticos es un ciclo con un punto crítico en su interior.

Consideremos un ejemplo más concreto.

EJEMPLO 4.2.2. Sea el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y).\end{aligned}\quad (4.8)$$

con f y g bajo hipótesis apropiadas. Supongamos además:

- (1) $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$;
- (2) $f < 0$, para $x > 0$, $|y| < \alpha x$, donde α es un número positivo.
- (3) Todos los puntos de $x > 0$, $|y| = \alpha x$ son de salida estricta.

Entonces se cumplen las hipótesis de Teorema 4.2.1. Ver la Figura 4.14.

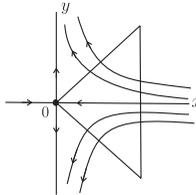


Figura 4.14. Todos los puntos de $x > 0$, $|y| = \alpha x$ son de salida estricta.

Basta con exigir estas condiciones en alguna vecindad del origen $(0, 0)$.

Las condiciones de (1) a (3) describen la situación que se encuentra en el caso de un nodo o una silla perturbada.

Una silla perturbada en su forma normal tiene la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\alpha x + o(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= \beta y + o(x^2 + y^2), \quad [\alpha, \beta > 0].\end{aligned}\quad (4.9)$$

El punto crítico $(0, 0)$ es aislado y se cumplen las condiciones (1)-(3).

Ver la Figura 4.15.

Verificamos que se cumplen las hipótesis de Teorema 4.2.1.

Para esto, tomamos como región G el triángulo

$$0 < x < \epsilon, \quad |y| < \alpha x,$$

con ϵ tal que en el se cumplen las condiciones (2),(3). Las funciones (f, g) se anulan en \bar{G} únicamente en $(0, 0)$, lo que es por ende el único punto crítico [lo es por (1)] en ∂G . Además siendo $f < 0$ en G , esta región no contiene los puntos límites de semiórbitas positivas en G^* . El lado derecho de G es de entrada (por ser $f < 0$), los otros lados son



Figura 4.15. El punto crítico $(0, 0)$ es aislado.

de salida estricta por la condición (3). Resulta $S = S^*$ disconexo y el Teorema 4.2.1 es aplicable. Hay una semiórbita positiva en G que tiende a $(0, 0)$. No se puede saber si hay nada más una. Ver la Figura 4.16.

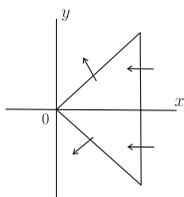


Figura 4.16. El punto crítico $(0, 0)$ es aislado.

4.2.2. Región doblemente conexa.

TEOREMA 4.2.3. *Sea G una región doblemente conexa en \mathbb{R}^2 (un "anillo topológico", con dos contornos). Sean C_1, C_2 las dos componentes de su frontera y supóngase $C_1 \subset S_*^+$ y $C_2 \subset S_*^+$, es decir, ambas constan de puntos estrictos de ingreso o de egreso. Entonces G contiene una órbita completa. (Ver la Figura 4.17).*

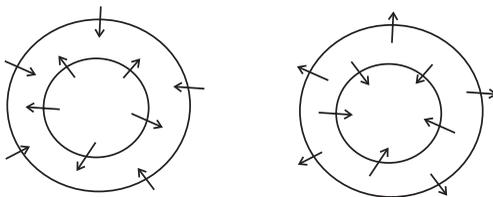


Figura 4.17. G contiene una órbita completa.

*) (Por el Teorema de LaSalle, poniendo $V = x$.)

Demostración. Consideremos el caso $\partial G \subset S_*^+$ (La frontera consta de puntos de egreso estricto). Se puede aplicar directamente el Corolario 4.1.9, el que da una semiórbita positiva en G , decimos $\gamma^+(p)$. Pero la órbita $\gamma(p)$ no puede entrar a G desde el exterior tampoco, pues no hay puntos de ingreso². Por lo tanto, $\gamma^+(p) \subset G$, lo cual demuestra el teorema. \square

OBSERVACIÓN 11. Lo mismo se puede inferir de la investigación de los conjuntos límites; pero eso requiere de la compacidad de G .

En el ejemplo que sigue damos un caso más concreto.

EJEMPLO 4.2.4. Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \dot{r} &= R(r, \theta), \\ \dot{\theta} &= \Theta(r, \theta). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Supóngase $R(r, \theta) < 0$, para $r = r_1$, y, $R(r, \theta) > 0$ para $r = r_2$. Sea $G = \{(r, \theta) \mid r_1 < r < r_2\}$, $C_1 = \{(r, \theta) \mid r = r_1\}$ y $C_2 = \{(r, \theta) \mid r = r_2\}$.

Se cumplen las condiciones del Teorema 4.2.3, ya que C_1 y C_2 son conjuntos de egreso estricto. Ver la Figura 4.18.

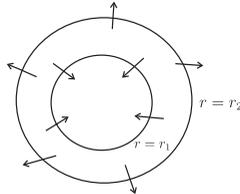


Figura 4.18. Ilustración del Ejemplo

Un problema no trivial, que hay que responder es el siguiente:
?Sigue en pie el Teorema 4.2.3 si se pide solamente $\partial G \subset S^\pm$?

4.3. Aplicación a sistemas a sistemas no autónomos.

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales no autónomo n -dimensional. Supongamos que Ω es un conjunto abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y la solución $\phi(t, t_0, x_0)$, $\phi(t_0, t_0, x_0) = x_0$, del sistema n -dimensional

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (4.11)$$

depende continuamente de (t, t_0, x_0) en su dominio de definición.

²Nótese que los puntos de egreso pueden ser a la misma vez de ingreso, pero lo mismo no es posible en el caso de un punto de egreso estricto.

Como notación escribimos P como el punto (t, x) de Ω , denotamos con $(\alpha(P), \beta(P))$ el intervalo maximal de existencia de la solución $\phi(t, P)$ que pasa a través del punto P , $\Phi(t, \phi(t, P))$ el punto sobre la trayectoria a través de P en el tiempo t y para cualquier intervalo $I \subset (\alpha(P), \beta(P))$, ponemos $\Phi(I, P) = \{(t, \phi(t, P)) \mid t \in I\}$ como el tramo de trayectoria a través de P correspondiente al tiempo $t \in I$. Sea $W \subset \Omega$ un conjunto abierto fijo, con la cerradura de W , \overline{W} , en Ω , y sea ∂W la frontera de W , en Ω .

DEFINICIÓN 4.3.1. Un punto $P_0 \in \partial W$ es un punto de egreso de W con respecto de la ecuación (4.11) y del conjunto Ω , si existe un $\delta > 0$ tal que $\Phi([t_0 - \delta, t_0], P_0) \subset W$. Un punto P_0 es un punto de egreso estricto de W si existe un $\delta > 0$ tal que $\Phi((t_0, t_0 + \delta], P_0) \subset \Omega \setminus \overline{W}$. El conjunto de todos los puntos de egreso se denota por S y el de egreso estricto con S^* .

Con estas definiciones, en [H] se demuestra en siguiente teorema para el caso de sistemas autónomos.

TEOREMA 4.3.2. Si $S = S^*$ y existe un conjunto $Z \subset W \cup S$ es un retracto de S pero no es un retracto de Z , entonces existe cuando menos un punto $P_0 \in Z \setminus S$ tal que $\Phi([t_0, \beta(P_0)), P_0) \subset W$

Consideremos el sistema de ecuaciones no autónomo,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= v(t)x. \end{aligned} \tag{4.12}$$

donde $v(t)$ es una función continua y $v(t) > 0$ para toda $t > 0$. Sea $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ y $W = \{(t, x, y) \mid |x| + |y| < a, a > 0\}$. Entonces $y\dot{y} = v(t)x\dot{x} > 0$ para toda $t > 0$ y x e y tales que $y = a - x$, para $0 < x < a$. También $y\dot{y} = v(t)x\dot{x} < 0$ para toda $t > 0$ y x e y tales que $y = -a - x$, para $-a < x < 0$. Luego, los conjuntos de puntos de egreso y de egreso estricto de W coinciden,

$$S = S^* = \{(t, x, y) \mid t \geq 0, y = a - x, \text{ si } 0 < x < a \text{ o } y = -a - x, \text{ si } -a < x < 0\}.$$

$$\text{Sea } Z = \{(t, x, y) \mid t = 0, y = x, |x| \leq \frac{a}{2}\}$$

entonces $Z \cap S$ es un retracto de S , sin embargo $Z \cap S$ no es un retracto de Z . El principio de Wazewski, Teorema 4.3.2 implica que existe una solución $\phi(t)$ del sistema no autónomo (4.12) acotada (puesto que está contenida en W), con dominio maximal \mathbb{R}^+ .

La solución ϕ del sistema lineal (4.11) es única salvo por un múltiplo distinto de cero. En efecto, sea $\psi(t)$ cualquier otra solución del sistema (4.11) obtenida por aplicación del Principio de Wazewski, entonces $\frac{d}{dt} \{\phi\psi - \dot{\phi}\psi\} = 0$, esto implica que $\phi\psi - \dot{\phi}\psi = c$, donde c es una constante. Integrando $\int_0^{+\infty} \{\phi\psi - \dot{\phi}\psi\} dt = \int_0^{+\infty} c dt$ Esto implica que

$c = 0$ puesto que $\phi\dot{\psi} - \dot{\phi}\psi \in L^1(0, +\infty)$ Así que $\frac{d}{dt} \ln \frac{\phi}{\psi} = 0$ para toda $t > 0$, por lo tanto, $\phi = c\psi$. \square

4.4. Teorema alternativo al de Wazewski

En esta sección formulamos un teorema alternativo al de Wazewski para sistemas dinámicos en el plano.

TEOREMA 4.4.1. *Dado un sistema dinámico en el plano, y una región en el mismo que es homeomorfa a un disco abierto y cuya frontera es homeomorfa a una circunferencia³. Se supone que ∂G consta de tres arcos abiertos (imágenes homeomorfas de $(0, 1)$) E_1, E_2, S , disjuntos y tres puntos $\mathbf{0}, q_1, q_2$ que no pertenecen a los arcos y E_1, E_2 colindan en $\mathbf{0}$. Sea $\mathbf{0}$ punto crítico E_1, E_2 de ingreso estricto y los únicos puntos de ingreso en $E_1 \cup E_2$ y S de egreso estricto. Finalmente, $\{\mathbf{0}\}$ sea el único conjunto invariante en \overline{G} . Entonces existe una semiórbita negativa, γ^- , en G , cuyo conjunto límite α es $\{\mathbf{0}\}$.*

Demostración. Si se puede probar que G contiene una semiórbita negativa, esta tiene $\mathbf{0}$ como único punto límite, pues el conjunto límite es invariante y necesariamente está contenido en \overline{G} , por lo tanto este es $\{\mathbf{0}\}$. Supongamos que G no contenga ninguna semiórbita negativa. Entonces cualquier órbita que intersecta a G tiene que entrar a través de E_1 o E_2 que son los únicos conjuntos de ingreso.

Siendo S un arco, debe existir en S un punto p^* que sea punto de acumulación tanto de puntos que “proviene” de E_1 como de los que vienen de E_2 (pues todo punto $p \in S$ “proviene” de E_1 o E_2 , y S es conexo). Supongamos que p^* proviene de E_1 ; sea $p_0 = p^*(-t_0)$ ($t_0 > 0$) el punto de ingreso de $\gamma(p^*)$ [“antecedente”]; existe $t' > t_0$: $p' := p^*(-t') \notin \overline{G}$ (por ser p_0) un punto de ingreso estricto).

Siendo $\overline{E_2}$ y $p^*[-t', 0]$ cerrados y disjuntos, el segundo posee una vecindad U que no intersecta a $\overline{E_2}$. Por dependencia continua con respecto a condiciones iniciales existe una vecindad V de p^* tal que $V[-t', 0] \subset U$, y además $V(-t') \subset \overline{CG}$ (por ser $p' = p^*(-t') \in \overline{G}$). Tómese $p \in S \cap V$, entonces $\gamma^-(p)$ ingresa a G (después de $-t'$, γ) por E_1 pues está en U que no intersecta E_2 . Por lo tanto, la parte de S de S “proveniente” de E_2 no se acumula en p^* . Esto es una contradicción. \square Ver Figura 4.19.

OBSERVACIÓN 12. Puede haber más de una órbita del tipo indicado en la conclusión del Teorema 4.4.1 (tipo “abanico”).

³La primera condición no implica a veces la segunda (consideremos un “disco con escisión”, Figura 4.19).

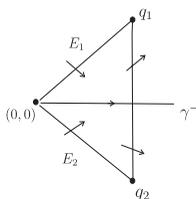


Figura 4.19. Ilustración del Teorema alternativo al de Ważewski.

OBSERVACIÓN 13. La condición de $\mathbf{0}$ único conjunto invariante, se cumple en las condiciones usuales por monotónia de $x(\cdot), y(\cdot)$; lo mismo para las otras hipótesis.

4.5. Método para establecer la existencia de una separatriz.

DEFINICIÓN 4.5.1. Un (semi-) grupo π^T es *asintóticamente compacto* (AC) sobre $A \subset X$ si para toda pareja de sucesiones $x_{\mathbb{N}} \subset A, t_{\mathbb{N}} \subset T$, tal que $t_n \rightarrow +\infty, F^{[0, t_n]}(x_n) \subset A$, el conjunto $\{F^{t_n}(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es relativamente compacto.

TEOREMA 4.5.2. *Sea (X, T, π) un sistema semidinámico, AC en \bar{U} con $U \in \mathcal{V}_M$, donde $M \subset X$ es un conjunto invariante, aislado de conjuntos invariantes en \bar{U} . Supongamos además que*

$\exists x_n \in \partial U, \exists y_n \in \partial U : y_n = x_n t_n; \exists \bar{t}'_n \in (0, t_n) : x_n \bar{t}'_n$ se acumulan en M .

Entonces existe una órbita principal y^* tal que,

$$L^-(y^*) \subset M.$$

Demostración.(bosquejo)

Existen una subsucesiones $\{x'_n\} \subset \{x_n\}, \{t'_n\} \subset \{t_n\}$ tales que

$$x'_n t'_n \rightarrow x^* \in M, y_n \rightarrow y^*.$$

Construiremos la solución principal y^* que pasa por y^* y tiene $L^-(y^*) = \{x^*\}$.

$$t_n > 0, y_n = x_n t_n \in \partial U, x_n [0, t_n] \subset U.$$

La propiedad AC en \bar{U} , implica que existe $y^* \in \partial U; y_n \rightarrow y^*$, entonces $t > 0$ implica que $y^*(-t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t_n - t)$ (dependencia continua). Por lo tanto, $y^+(y^*)$ es órbita principal; $y^-(y^*) \subset \bar{U}$,

$$y^-(y^*) \subset \bar{U}, L^-(y^*) \subset \bar{U},$$

Puesto que M está aislado de conjuntos invariantes se tiene $L^-(y^*) \subset M$. \square

EJEMPLO 4.5.3. Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en el plano

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^3(x^2 + 1), \\ \dot{y} &= x^3(y^2 + 1).\end{aligned}\tag{4.13}$$

Ver Figura 4.20:

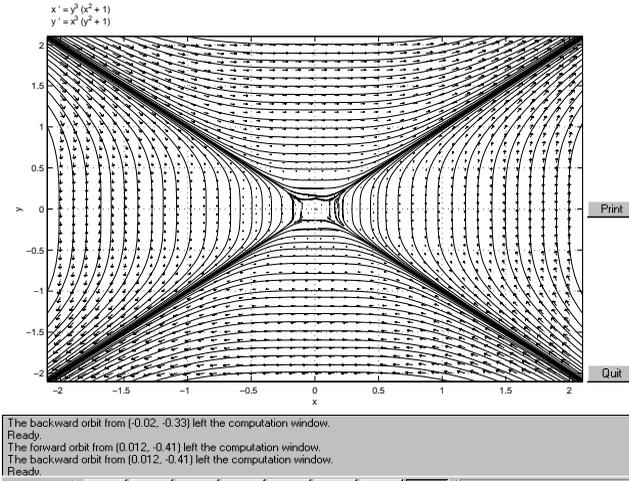


Figura 4.20. Ilustración del Teorema 4.5.2.

Bibliografía

- [AS1] L. Aguirre and P. Seibert. Bifurcation from unstable equilibria, Aport. Mat., XXVII Congr. Nac. Soc. Mat. Mex., Ser. Com. **16**, (1995), 165--171.
- [AS2] L. Aguirre and P. Seibert. Types of change of stability and corresponding types of Bifurcations, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **5**, (4), (1999), 741--752.
- [Am] H. Amann. Ordinary Differential Ecuations. An Introduction to Nonlinear Analysis. Walter de Gruyter, Berlin, 1990.
- [Ba] N. N. Bautin. On the behavior of dynamical systems with small violations of the condition of stability of Routh--Hurwitz. (Russian) *Akad. Nauk SSSR. Prikl. Mat. Meh.* **12**, (1948), 613--632.
- [BF] H. Bohr and W. Fenchel, Ein Satz über stabile Bewegungen in der Ebene. In : *Harald Bohr Collected Mathematical Works*, Vol. II, C. 38. Compehagen (1952).
- [Bh] N.P. Bhatia and G.P. Szego. Stability Theory of Dynamical Systems. Grundlehren d. math. Wiss. **161**, Springer--Verlag, Berlin--Heidelberg--New York, 1970.
- [BO] N.P. Bhatia and O. Hajek. Local Semi-Dynamical Systems. **90**, Springer--Verlag, Berlin--Heidelberg--New York, 1969.
- [ChH] S. N. Chow y J. K. Hale. Methods of bifurcation theory, Springer--Verlag, Berlin, 1982.
- [Du] J. Dugundji. Topology, Allyn and Bacon, Boston, 1966.
- [Fl] J. S. Florio. On topological content of stability, instability and persistence. *Universitatis iagellonicae acta mathematica*, fasciculus XXXVI, (1997), 89--95.
- [Ho] E. Hopf. Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems, Ber. *Math.Phys.* Sächsische Akad. wiss. Leipzig **94**, 1--22 (1942).
- [Ha] W. Hahn. Theory and application of Liapunov's direct method. English edition prepared by Siegfried H. Lehnigk; translation by Hans H. Losenthien and Siegfried H. Lehnigk Prentice--Hall, Inc., Englewood.
- [GH] W.H. Gootschalk and G. A. Hedlund. Topological Dynamics. Providence 1955.
- [HK] J.K. Hale and H. Koçak. Dynamics and Bifurcations. Springer-Verlag, New York, (1991).
- [Ir] I.L. Iribarren. Topología de espacios métricos, Limusa--Wiley, S.A., México, (1973).
- [Ku] C. Kuratowski. *Topologie II*. Panstwowe Wydawnictwo Naukowe. Warsaw, Polonia, 1961.
- [La] O. Ladyzhenskaya. Attractors for semigroups and evolution equations, Accad. Naz. lincei. Cambridge University Press (1991).
- [Le] S. Lefschetz. Differential equations: geometry theory, Dover publications, inc. New York (1977).
- [Ma] F. Marchetti. Some stability problems from a topological viewpoint. *Rc. Acad. Nac. Lincei Sci. fis. mat.* **60** (6), 733--742(1976).
- [MNSS] F. Marchetti, P. Negrini, L. Salvadori and M. Scalia. Liapunov direct method in approaching bifurcation problems. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **108**, (1976), 211--226.

- [MM] J. Marsden and M.F. McCracken. *The Hopf Bifurcation and its Applications*. Springer, New York, (1976).
- [NS] V. V. Nemytskii and V. V. Stepanov. *Qualitative theory of differential equations*. Dover publications, inc. New York (1989).
- [Sa] S.H. Saperstone. *Semidynamical Systems in Infinite Dimensional Spaces*, Springer-Verlag, Berlin (1981).
- [SADA] P.Seibert, J.H. Arredondo, J. Delgado y L. Aguirre. Reduction theorems for uniform stability of systems in general spaces. *Bol. Soc. Mat. Mex.* (3), 1997, 69-88.
- [Se] P. Seibert. Relative Stability and Stability of closed sets. *Lecture Notes in math.* **144**, Springer-Verlag, 1970, pp. 185--189.
- [Se 2] P. Seibert. Stability under perturbations in generalized dynamical systems. *Int. Symp. Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Academic Press, New York 1963, pp. 463--473.
- [Si] K. S. Sibirsky. *Introduction to topological dynamics*. Noordhoff International Publishing Leyden, (1975).
- [SF1] P. Seibert and J.S. Florio. On the foundations of bifurcation theory. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applic.* **8 22**, (1994), 927--944.
- [SF2] P. Seibert and J. S. Florio. On bifurcations arising from unstable equilibria and invariant sets. *J. Differential Equations* **150** (1998), no. 2, 250--263.
- [Te] R. Teman. *Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. Springer, New York (1988).
- [Ur1] T. Ura. Sur les courbes définies par les équations différentielles dans l'espace à m dimensions. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **70** (1953), 287--360.
- [Ur2] T. Ura. On the flow outside a closed invariant set; stability, relative stability and saddle sets. *Contrib. Differential Equations* **3** (1963), 249--294.
- [Wh] H. Whitney. Regular families of curves. *Ann. of Math. Contrib.* **34** (1933), 244--270.
- [Yo] T. Yoshizawa. *Stability Theory by Liapunov's Second Method*. *Japanese Mathematical Society* Tokyo (1963).